

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ИВАНОВСКАЯ ПОЖАРНО-  
СПАСАТЕЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ ГОСУДАРСТВЕННОЙ ПРОТИВОПОЖАРНОЙ  
СЛУЖБЫ МИНИСТЕРСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ПО ДЕЛАМ ГРАЖДАНСКОЙ ОБОРОНЫ, ЧРЕЗВЫЧАЙНЫМ СИТУАЦИЯМ И  
ЛИКВИДАЦИИ ПОСЛЕДСТВИЙ СТИХИЙНЫХ БЕДСТВИЙ»**



**Методические рекомендации  
для самостоятельной работы  
обучающихся по дисциплине  
«Прикладная механика»  
(специальность 20.05.01 «Пожарная безопасность»)**

**Иваново**

**Покровский А.А., Киселев В.В.**

Методические рекомендации для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине «Прикладная механика» (для специальности 20.05.01 «Пожарная безопасность») – Иваново: Ивановская пожарно-спасательная академия ГПС МЧС России. – 87 с.

Методические рекомендации для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине «Прикладная механика» (для специальности 20.05.01 «Пожарная безопасность»).

В методических рекомендациях представлен теоретический и практический материал по дисциплине «Прикладная механика», для самостоятельного изучения ключевых тем. В методических рекомендациях также представлен список рекомендуемой литературы.

**Оглавление**

	стр.
Введение . . . . .	4
1. Статика . . . . .	6
2. Кинематика точки и твердого тела . . . . .	20
3. Динамика . . . . .	35
4. Структурный и кинематический анализ плоских механизмов . . . . .	45
5. Приводы механизмов . . . . .	58
6. Простые виды деформаций . . . . .	73
7. Изгиб балки . . . . .	84
Список литературы . . . . .	87

## Введение

Дисциплина «Прикладная механика» является основой общетехнической и общепрофессиональной подготовки инженера любого профиля, в частности, инженера пожарной безопасности.

Развитие современной пожарной техники ставит перед инженерами пожарной безопасности самые разнообразные задачи, связанные с расчетом различных сооружений (зданий, мостов, каналов, плотин и т.п.), с эксплуатацией всевозможных машин, механизмов, двигателей и, в частности, таких объектов, как пожарные автомобили, составляющие их узлы (гидроприводы, насосы). Конструирование машины независимо от того, выполняется оно учащимся или опытным инженером, - процесс творческий. Каждая конструкторская задача, как правило, имеет много решений. Опираясь на имеющиеся теоретические знания, учащийся должен выбрать из многих возможных решений одно, наилучшее. При этом ему приходится принимать во внимание часто противоречивые технологические и эксплуатационные требования, предъявляемые к проектируемому изделию. Несмотря на многообразие всех этих проблем, решения их в определенной части основываются на некоторых общих принципах и имеют общую научную базу.

Основные теоретические положения, изучаемые в дисциплине «Прикладная механика» широко используются при изучении ряда специальных дисциплин, а именно: «Здания и сооружения и их устойчивость при пожаре», «Пожарная безопасность в строительстве», «Расследование и экспертиза пожаров», «Пожарная безопасность технологических процессов», «Теория горения и взрыва», «Гидравлика», «Противопожарное водоснабжение» и т. д.

Эффективность освоения дисциплины «Прикладная механика» в значительной мере зависит от содержания и постановки лабораторного практикума, поскольку лабораторные работы являются связующим звеном теории и практики, курсового проектирования, практикума решения прикладных практических задач. Данные мероприятия позволяют углублять и закреплять

теоретические знания.

## 1. Статика

### Основные понятия механики

Движение является способом существования материи, ее основным неотъемлемым свойством. Под движением в общем смысле понимается не только перемещение тел в пространстве, но и тепловые, химические, электромагнитные и любые другие изменения и процессы, включая наше сознание и мысль.

Механика изучает наиболее простую и легко наблюдаемую форму движения - механическое движение.

*Механическим движением называется как происходящее с течением времени изменение положения материальных тел относительно друг друга, так и изменение относительного положения частиц одного и того же материального тела, т. е. его деформация.*

Нельзя, конечно, все многообразие явлений природы свести только к механическому движению и объяснить их на основании положений одной механики. Механическое движение никоим образом не исчерпывает существа различных форм движения, но оно всегда присутствует в каждой из них и должно быть исследовано раньше всего остального.

В связи с колоссальным развитием науки и техники стало невозможным в одной дисциплине сосредоточить изучение множества вопросов, связанных с механическим движением различного рода материальных тел. Современная механика представляет собой целый комплекс общих и специальных технических дисциплин, посвященных проектированию и расчету различных сооружений, механизмов и машин.

Материальные тела, с которыми имеют дело в этих дисциплинах, весьма различны, но движение их обладает многими общими свойствами, не зависящими от физических свойств самих движущихся тел. Эти общие свойства механического движения материальных тел и изучаются в теоретической механике.

*Теоретической механикой называется наука, изучающая общие законы механического движения материальных тел и устанавливающая общие приемы и методы для решения вопросов, связанных с этим движением.*

*Механическим движением называется изменение с течением времени взаимного положения материальных точек в пространстве.*

*Механическим взаимодействием называется такое взаимодействие материальных тел, которое изменяет или стремится изменить характер их механического движения.*

Для того чтобы установить законы движения, общие для всех материальных тел, в теоретической механике прибегают к идеализации явлений, т. е. к выделению главного, от чего эти явления существенным образом зависят, и отбрасыванию второстепенных обстоятельств, не существенных в рассматриваемых условиях. Поэтому в теоретической механике рассматривается движение не тех физических тел, которые реально существуют в природе, а некоторых абстрактных моделей, отражающих только определенные общие свойства.

В динамике изучаются зависимости между движением материальных тел и действующими на них силами.

Подобное деление курса противоречит сущности механических явлений. Покой и равновесие являются лишь частными случаями движения, а не какими-то особыми случаями, которые должны быть рассмотрены независимо от движения и в качестве его предпосылок. Все положения статики могут быть выведены из законов динамики. Идут же на такую последовательность в построении курса теоретической механики в вузах потому, что сложность математического аппарата, требуемого для изучения механики, возрастает постепенно, и можно вести ее изучение параллельно с изучением курса высшей математики, а потому раньше перейти к изучению специальных дисциплин.

Теоретическая механика служит научным фундаментом для многих технических дисциплин. Ее методами и приемами пользуются при всех технических расчетах, связанных с проектированием различных сооружений и машин и их эксплуатацией. Роль и значение теоретической механики для техники непрерывно возрастает. Сложнейшие проблемы, постоянно возникающие в связи с гигантским развитием техники, организацией и развитием все новых и новых видов производства и новых технических средств, уже нельзя решать на основе одних опытных данных, на основе одной практики. Требуется научное предвидение и строгий предварительный расчет, основанные на глубоком знании теории, причем в первую очередь на знании законов и методов теоретической механики.

### **Аксиомы статики**

Аксиомы статики представляют собою результат обобщений многочисленных опытов и наблюдений над равновесием и движением тел, неоднократно подтвержденных практикой. Некоторые основные законы механики Галилея – Ньютона являются одновременно и аксиомами статики.

1. Аксиома инерции. *Под действием взаимно уравновешивающихся сил материальная точка (тело) находится в состоянии покоя или движется прямолинейно и равномерно.* Аксиома инерции выражает установленный Галилеем закон инерции. Аксиома 1 определяет простейшую уравновешенную систему сил, так как опыт показывает, что свободное тело, на которое действует только одна сила, находиться в равновесии не может.

2. Аксиома равновесия двух сил. *Две силы, приложенные к твердому телу, взаимно уравновешиваются только в том случае, если их модули равны и если они направлены по одной прямой в противоположные стороны (рис. 1.1).*

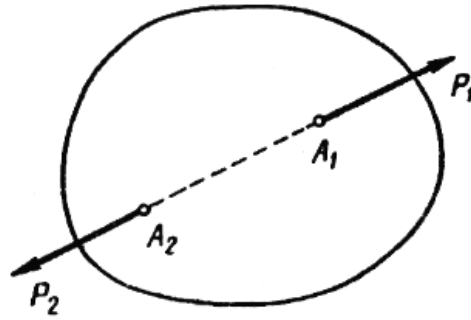


Рис. 1.1. Уравновешенная пара сил в плоскости

3. Аксиома присоединения и исключения уравнивающих сил. *Действие системы сил на твердое тело не изменится, если к ней присоединить или из нее исключить систему взаимно уравнивающих сил.*

Пусть, например, к твердому телу приложены силы  $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \vec{P}_4$ , под действием которых тело находится в покое или совершает какое-то движение (рис. 1.2). Приложим к телу две равные противоположно направленные силы  $\vec{Q}_1, \vec{Q}_2$ , которые взаимно уравниваются. Если тело в покое, то оно сохранит его; если тело в движении, то оно будет двигаться под действием новой системы сил  $\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \vec{P}_4$  так же, как под действием сил  $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \vec{P}_4$ , т.е. новая система сил эквивалентна прежней. Это же произойдет, если из заданной системы сил, приложенных к твердому телу, исключить взаимно уравнивающиеся силы, входящие в её состав.

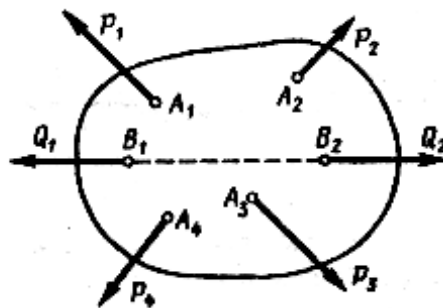


Рис. 1.2. Уравновешенная система сил в плоскости

Следствие. *Не изменяя кинематического состояния абсолютно твердого тела, силу можно переносить вдоль линии ее действия, сохраняя неизменными ее модуль и направление.*

4. Аксиома параллелограмма сил. *Равнодействующая двух пересекающихся сил приложена в точке их пересечения и изображается диагональю параллелограмма, построенного на этих силах (рис. 1.3).*



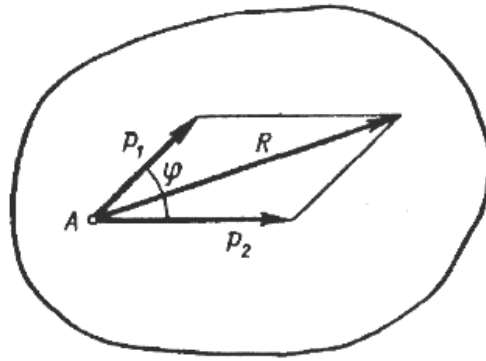


Рис. 1.3. Сложение сил по правилу параллелограмма

$$\vec{R} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 \quad (1.1)$$

Модуль равнодействующей силы определяется по следующей формуле:

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2 \cos \varphi} \quad (1.2)$$

5. Аксиома действия и противодействия. *Всякому действию соответствует равное и противоположно направленное противодействие.* Эта аксиома утверждает, что силы действия друг на друга двух тел равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны. Таким образом, в природе не существует одностороннего действия силы. Будучи приложенными к разным телам, эти силы не уравниваются. Аксиома действия и противодействия установлена Ньютоном и известна как один из основных законов классической механики.

6. Аксиома сохранения равновесия сил, приложенных к деформирующемуся телу при его затвердевании. *Равновесие сил, приложенных к деформирующемуся телу, сохраняется при его затвердении.*

### Проекция силы на ось и плоскость

Аналитический метод решения задач статики основывается на понятии о проекции силы на ось. *Проекцией силы на ось называется скалярная величина, равная взятой с соответствующим знаком длине отрезка, заключенного между проекциями начала и конца силы.* Проекция имеет знак плюс, если перемещение от её начала к концу происходит в положительном направлении оси, и знак минус – если в отрицательном. Из определения следует, что проекции данной силы на любые параллельные и одинаково направленные оси равны друг другу. Этим удобно пользоваться при вычислении проекции силы на ось, не лежащую в одной плоскости с силой. Обозначать проекцию силы  $F$  на ось  $Ox$ , будем символом  $F_x$ . Тогда для сил, изображенных на рис. 1.4, получим:

$$F_x = AB_1 \cos \alpha = ab, \quad Q_x = -ED_1 = -de.$$

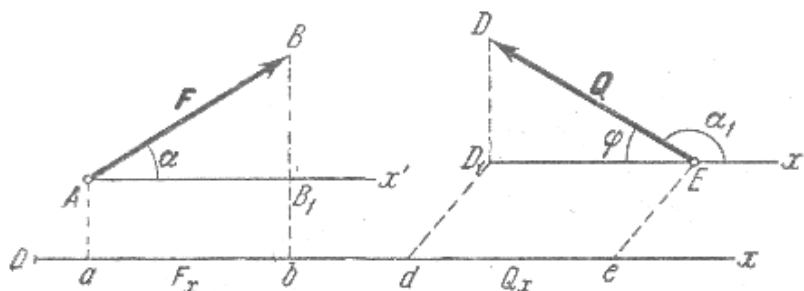


Рис. 1.4. Проекции сил на ось

Но из чертежа видно, что  $AB_1 = F \cos \alpha$ ,  $ED_1 = Q \cos \varphi = -Q \cos \alpha_1$ . Следовательно,  $F_x = F \cos \alpha$ ,  $Q_x = -Q \cos \varphi = Q \cos \alpha_1$ , т.е. *проекция силы на ось равна произведению модуля силы на косинус угла между силой и положительным направлением оси*. При этом проекция будет положительной, если угол между направлением силы и положительным направлением оси – острый, и отрицательной, если этот угол – тупой; если сила перпендикулярна к оси, то ее проекция на ось равна нулю.

*Проекцией силы  $F$  на плоскость  $Oxy$  называется вектор  $F_{xy} = OB_1$  заключенный между проекциями начала и конца силы  $F$  на эту плоскость* (рис. 1.5). Таким образом, в отличие от проекции силы на ось, проекция силы на плоскость есть величина векторная, так как она характеризуется не только своим численным значением, но и направлением в плоскости  $Oxy$ . По модулю  $F_{xy} = F \cos \theta$ , где  $\theta$  – угол между направлением силы  $F$  и ее проекции  $F_{xy}$ .

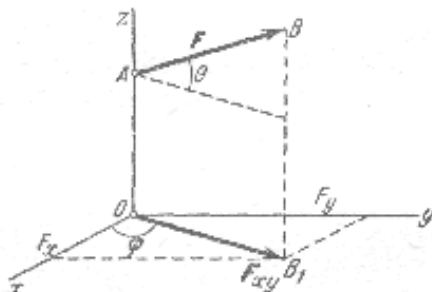


Рис. 1.5. Проекция силы на плоскость

В некоторых случаях для нахождения проекции силы на ось бывает удобнее найти сначала ее проекцию на плоскость, в которой эта ось лежит, а затем найденную проекцию на плоскость спроектировать на данную ось.

### Момент силы относительно центра и оси. Пара сил

Возникновение понятия момента силы относительно центра связано с задачей о рычаге. Представим себе твердое тело (рис. 1.6), имеющее сферическую шарнирную опору, помещенную в центре  $O$  тяжести тела. Если к телу приложить силу  $P_1$  на некотором расстоянии  $h_1$  от неподвижной точки  $O$ , то тело начнет вращаться вокруг этой точки. Если же к телу приложить еще и другую силу  $P_2$ , стремящуюся вращать тело в направлении, противоположном вращению силой  $P_1$  в плоскости силы  $P_1$  и точки  $O$ , и если при этом отношение модулей сил  $P_1$  и  $P_2$

будет обратно пропорционально их расстояниям  $h_1$  и  $h_2$  от неподвижной точки  $O$ , то тело будет оставаться в равновесии.

Вращательное действие силы  $P_1$  будет уравниваться вращательным действием силы  $P_2$ , если  $\frac{P_1}{P_2} = \frac{h_2}{h_1}$  и, следовательно,  $P_1 h_1 = P_2 h_2$ .

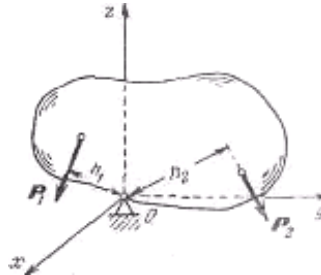


Рис. 1.6. Вращение твердого тела

Таким образом, мерой вращательного эффекта силы относительно какой-либо точки (центра) является *произведение модуля силы на плечо, т. е. на кратчайшее расстояние ее линии действия от центра момента*. Это произведение называется *модулем момента силы относительно этого центра*.

Для эквивалентности вращательного действия двух сил относительно какого-либо центра равенства модулей их моментов относительно этого центра недостаточно. Необходимо еще, чтобы совпадали плоскости, проходящие через линии действия сил и центр моментов, и чтобы силы вращали тело вокруг центра моментов в одном и том же направлении.

Таким образом, для полного определения вращательного эффекта силы относительно какого-либо центра необходимо знать не только модуль момента силы, но и указать плоскость, проходящую через линию действия силы и центр момента, а также сторону вращения в этой плоскости.

Положение плоскости в пространстве определяется, как известно, положением перпендикуляра к этой плоскости.

Из всего сказанного вытекает следующее векторное определение момента силы относительно точки: *моментом силы относительно какой-либо точки  $O$  (центра) называется приложенный к этой точке вектор, направленный перпендикулярно к плоскости, в которой расположены линия действия силы и центр  $O$ , и притом в ту сторону, откуда вращение тела силой представляется совершающимся против часовой стрелки*.

Вектор момента силы  $P$  относительно центра  $O$  будем обозначать символом  $M_O(P)$ .

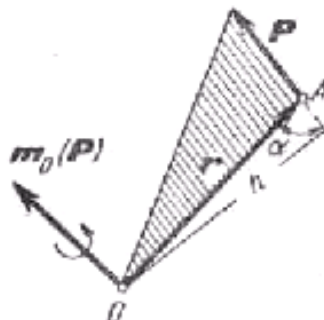


Рис. 1.7. Момент силы

Модуль момента силы относительно центра равен, как было сказано выше, произведению модуля силы на ее плечо, т. е. на длину перпендикуляра, опущенного из центра момента на линию действия силы (рис. 1.7).

$$|M_O(P)| = Ph. \quad (1.3)$$

Можно сказать, что момент силы относительно какого-либо центра равен векторному произведению радиуса-вектора  $r$ , проведенного из центра момента в точку приложения силы на вектор силы.

$$M_O(P) = r \times P. \quad (1.4)$$

Момент силы относительно точки является одним из важнейших понятий механики. Обобщая это понятие, можно находить момент относительно любой точки, независимо от того, может ли в действительности тело вращаться вокруг этой точки.

Моментом силы  $P$  относительно оси  $z$  называется взятое со знаком плюс или минус произведение модуля проекции  $P_1$  силы  $P$  на плоскость, перпендикулярную оси, на ее плечо  $d_1$  относительно точки  $O$  пересечения оси с плоскостью:

$$M_z = \pm P_1 d_1. \quad (1.5)$$

Положим, что к твердому телу в точке  $A$  приложена сила  $P$ . Чтобы вычислить момент этой силы относительно оси  $z$ , следует спроецировать силу  $P$  на плоскость  $L$ , перпендикулярную оси  $z$ , а затем вычислить момент ее проекции  $P_1$  на эту плоскость относительно точки  $O$  пересечения оси  $z$  с плоскостью  $L$ , приписав этому моменту знак плюс или минус (рис. 1.8).

Момент силы относительно оси считается положительным, если, смотря навстречу оси  $z$ , можно видеть проекцию  $P_1$  стремящейся вращать плоскость  $L$  вокруг оси  $z$  в сторону, противоположную вращению часовой стрелки.

Момент силы относительно оси изображается отрезком, отложенным по оси  $z$  от точки  $O$  в положительном направлении, если  $M_z > 0$ , и в отрицательном — если  $M_z < 0$ .

Значение момента силы относительно оси может быть также выражено удвоенной площадью треугольника:  $M_z = \pm 2\Delta A_1 O B_1$ .

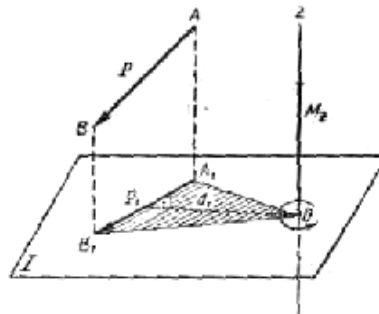


Рис. 1.8. Момент силы относительно оси

Момент силы относительно оси равен нулю в двух случаях:

1) если  $P_1 = 0$ , т.е. линия действия силы параллельна оси;

2) если  $d_1 = 0$ , т. е. линия действия силы пересекает ось. Отсюда следует: *если сила и ось лежат в одной плоскости, то момент силы относительно этой оси равен нулю.*

Система двух равных по модулю, параллельных и противоположно направленных сил  $P$  и  $P'$  называется парой сил. Плоскость, в которой находятся линии действия сил  $P$  и  $P'$  называется плоскостью действия пары сил (рис. 1.9).

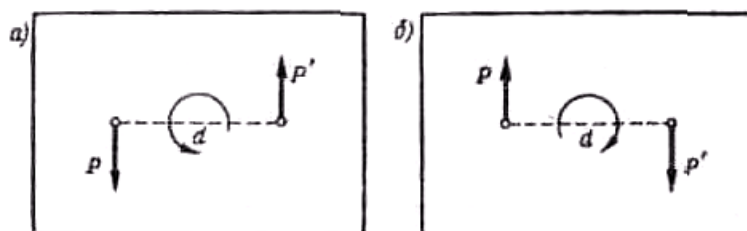


Рис. 1.9. Пара сил

Пара сил не имеет равнодействующей, однако силы пары не уравновешиваются, так как они не направлены по одной прямой. Пара сил стремится произвести вращение твердого тела, к которому она приложена. Пара сил, не имея равнодействующей, очевидно, не может быть уравновешена силой. Кратчайшее расстояние  $d$  между линиями действия сил, составляющих пару, называется *плечом пары сил*.

Действие пары сил на твердое тело характеризуется ее моментом. *Момент пары сил определяется произведением модуля одной из сил пары на ее плечо:*

$$M = Pd \quad (1.6)$$

Если силы выражать в *ньютон*ах, а плечо – в *метрах*, то момент пары сил будет выражаться в *ньютон-метрах* (Н·м).

Момент пары сил изображают вектором. *Вектор момента  $M$  пары  $P P'$  направляют перпендикулярно плоскости действия пары сил в такую сторону, чтобы, смотря навстречу этому вектору, видеть пару сил стремящейся вращать плоскость ее действия в сторону, обратную вращению часовой стрелки* (рис. 1.10).

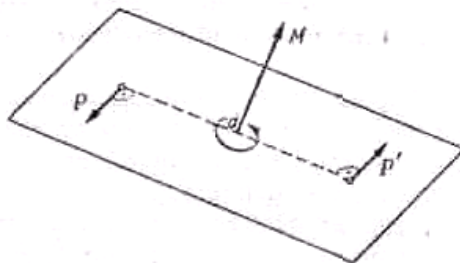


Рис. 1.10. Вектор момента пары сил

Вместо вектора момента каждой пары сил, перпендикулярного плоскости чертежа, указывают только направление, в котором пара сил стремится вращать эту плоскость.

В этом случае момент пары сил определяют произведением модуля сил на плечо пары сил, взятым со знаком плюс или минус, т.е. момент пары сил рассматривают как алгебраическую величину:

$$M = \pm Pd \quad (1.7)$$

Момент пары сил считают положительным, если пара сил стремится вращать плоскость чертежа в сторону, противоположную вращению часовой стрелки (рис. 1.9), и отрицательным — в сторону вращения часовой стрелки.

### Связи. Реакции связей

Задаваемые силы выражают действие на твердое тело других тел, вызывающих или способных вызвать изменение его кинематического состояния.

Реакцией связи называется сила или система сил, выражающая механическое действие связи на тело.

Одним из основных положений механики является принцип освобождения твердых тел от связей, согласно которому несвободное твердое тело можно рассматривать как свободное, на которое кроме задаваемых сил действуют реакции связей.

Пусть, например, на гладкой неподвижной горизонтальной плоскости покоится шар (рис. 1.11). Плоскость, ограничивая движение шара, является для него связью.

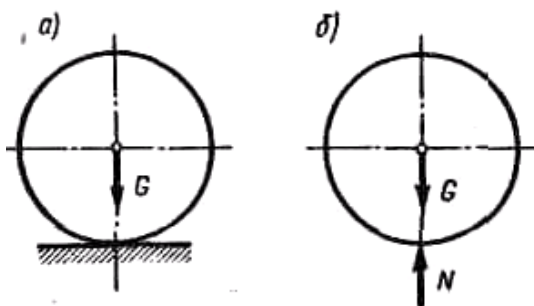


Рис. 1.11. Принцип освобождения от связи

Если мысленно освободить шар от связи (рис. 1.11), то для удержания его в покое к нему в точке касания с плоскостью нужно приложить силу  $N$ , равную весу шара  $G$  по модулю и противоположную ему по направлению. Сила  $N$  и будет реакцией плоскости. Тогда шар, освобожденный от связи, будет свободным телом, на которое действуют задаваемая сила  $G$  и реакция плоскости  $N$ .

Гладкая плоскость не противодействует перемещению тела вдоль плоскости под действием задаваемых сил (рис. 1.12, а), но не допускает его перемещения в направлении, перпендикулярном плоскости. Поэтому действие плоскости на тело выражается нормальной реакцией (рис. 1.12, б). Реакция гладкой плоскости направлена перпендикулярно плоскости.

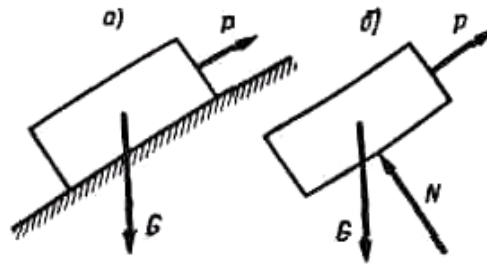


Рис. 1.12. Связь – гладкая поверхность

Если к концу  $B$  нити  $AB$ , прикрепленной в точке  $A$ , подвесить груз весом  $G$  (рис. 1.13, а), то реакция  $S$  нити будет приложена к грузу в точке  $B$ , равна по модулю его весу  $S$  и направлена вертикально вверх (рис. 1.13, б). Реакция нити направлена вдоль нити.

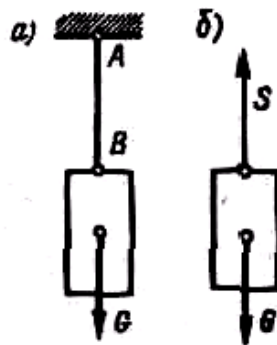


Рис. 1.13. Связь – тонкий стержень

Пусть балка весом  $G$  в точке  $B$  опирается на гладкую поверхность, а в точках  $A$  и  $D$  – на гладкие горизонтальную и вертикальную плоскости (рис. 1.14). Тогда реакции опорной поверхности и опорных плоскостей будут иметь указанные на рис. 1.14 направления.

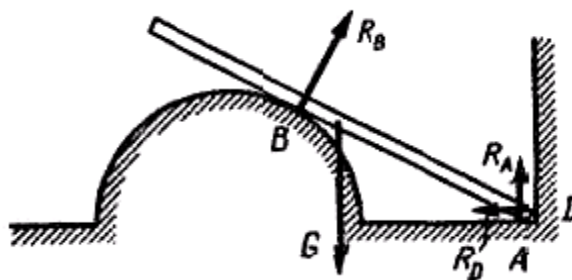


Рис. 1.14. Реакции связей балки

Для определения каждой реакции нужно знать три ее элемента: модуль, направление и точку приложения. Точка приложения реакции, как правило, бывает известна. Направление же реакций известно лишь для некоторых типов связей.

Если существуют два взаимно перпендикулярных направления на плоскости, в одном из которых связь препятствует перемещению тела, а в другом – нет, то направление ее реакции противоположно первому направлению.

Рассмотрим два основных типа опор балок и их реакции.

На рис. 1.15 изображена шарнирно-неподвижная опора, которая препятствует любому поступательному движению балки, но дает ей возможность свободно поворачиваться вокруг оси шарнира. По своей конструкции такая шарнирная опора состоит из двух обойм, из которых одна закреплена на балке, а другая – на неподвижной поверхности. Эти обоймы соединяются с помощью цилиндрического валика (показано среднее сечение конструкции). В зависимости от действующих сил валик может прижиматься к различным точкам обоймы. Реакция  $R$  шарнирно-неподвижной опоры проходит через центр шарнира  $O$  и точку соприкосновения  $A$  (рис. 1.16, а, б), но ее модуль и направление не известны.

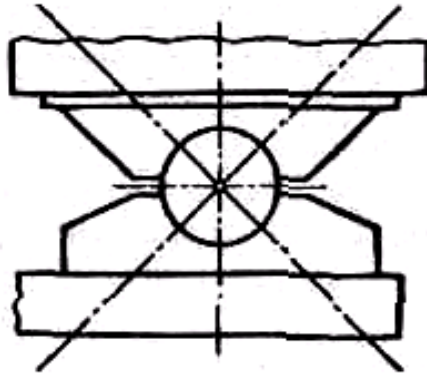


Рис. 1.15. Шарнирно-неподвижная опора

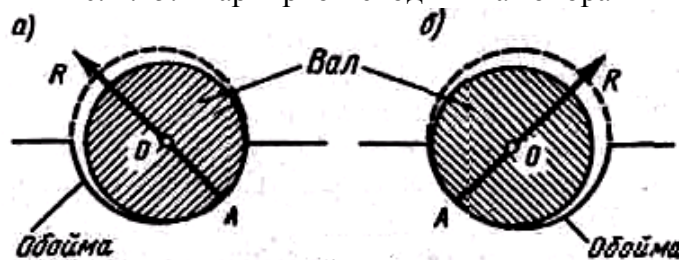


Рис. 1.16. Возможные направления реакций шарнирно-неподвижной опоры

*Шарнирно-подвижная опора*, нижняя обойма которой поставлена на катки, не препятствует перемещению балки параллельно опорной плоскости (рис. 1.17). Если не учитывать трения катков, то линию действия реакции такой опоры следует считать проходящей через центр шарнира перпендикулярно опорной плоскости. Таким образом, не известен лишь модуль этой реакции.

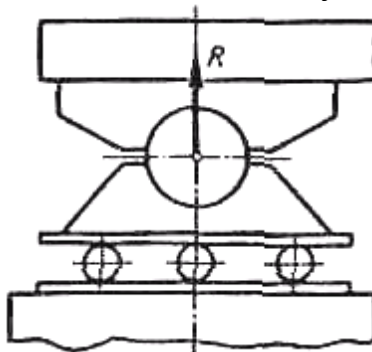


Рис. 1.17. Шарнирно-подвижная опора

Пусть в какой-нибудь конструкции связью является *стержень*, закрепленный на концах шарнирами (рис. 1.18). Примем, что весом стержня по сравнению с воспринимаемой им нагрузкой можно пренебречь. Тогда на стержень будут действовать только две силы, приложенные в шарнирах  $A$  и  $B$ .



Вообще эти силы могут быть направлены произвольно. Но если стержень  $AB$  находится в равновесии, то по аксиоме 1 приложенные в точках  $A$  и  $B$  силы должны быть направлены вдоль одной прямой, т. е. вдоль оси стержня. Следовательно, нагруженный на концах стержень, *весом которого по сравнению с этими нагрузками можно пренебречь*, работает только на растяжение или на сжатие. Если такой стержень является связью, то *реакция  $N$  стержня будет направлена вдоль оси стержня*.

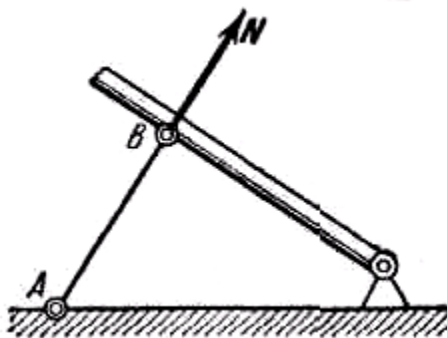


Рис. 1.18. Реакция в тонком стержне  $AB$

**Аксиома связей.** Равновесие несвободных тел изучается в статике на основании следующей аксиомы: *всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если отбросить связи и заменить их действие реакциями этих связей*.

Определение реакций связей имеет то практическое значение, что, зная их, мы будем знать и силы давления на связи, т. е. те исходные данные, которые необходимы для расчета прочности соответствующих частей конструкции.

#### **Аналитические условия равновесия произвольной системы сил**

Необходимые и достаточные условия равновесия любой системы сил даются равенствами  $R=0$ ,  $M_o=0$ . Найдем вытекающие отсюда аналитические условия равновесия плоской системы сил. Их можно получить в трех различных формах.

1. Основная форма условий равновесия. Так как вектор  $R$  равен нулю, когда равны нулю его проекции  $R_x=0$  и  $R_y=0$ , то для равновесия должны выполняться равенства  $R_x=0$ ,  $R_y=0$  и  $M_o=0$ , где в данном случае  $M_o$  - алгебраический момент, а  $O$  - любая точка в плоскости действия сил.

$$\sum F_{kx} = 0, \sum F_{ky} = 0, \sum M_o(F_k) = 0. \quad (1.8)$$

Формулы выражают следующие аналитические условия равновесия: *для равновесия произвольной плоской системы, сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из двух координатных осей и сумма их моментов относительно любого центра, лежащего в плоскости действия сил, были равны нулю*. Одновременно равенства (2.11) выражают условия равновесия твердого тела, находящегося под действием плоской системы сил.

2. Вторая форма условий равновесия: *для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов всех этих сил относительно каких-нибудь двух центров  $A$  и  $B$  и сумма их проекций на ось  $Ox$ , не перпендикулярную прямой  $AB$ , были равны нулю*:

$$\sum M_A(F_k)=0, \sum M_B(F_k)=0, \sum F_{kx}=0 \quad (1.9)$$

3. Третья форма условий равновесия (уравнения трех моментов): для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов всех этих сил относительно любых трех центров А, В, и С, не лежащих на одной прямой, были равны нулю:

$$\sum M_A(F_k)=0, \sum M_B(F_k)=0, \sum M_C(F_k)=0 \quad (1.10)$$

### Центр тяжести однородного тела. Координаты центра тяжести однородного тела

На любую частицу тела, находящегося вблизи земной поверхности, действует направленная вертикально вниз сила, называемая силой тяжести.

Для тел, размеры которых очень малы по сравнению с земным радиусом, силы тяжести, действующие на частицы тела, можно считать параллельными друг другу и сохраняющими для каждой частицы постоянную величину при любых поворотах тела. Поле тяжести, в котором выполняются эти два условия, называют *однородным полем тяжести*.

Равнодействующую сил тяжести  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , действующих на частицы данного тела, обозначим  $P$  (рис. 1.19). Модуль этой силы равен весу тела и определяется равенством

$$P = \sum p_k \quad (1.11)$$

При любом повороте тела силы  $p_k$  остаются приложенными в одних и тех же точках тела и параллельными друг другу; изменяется только их направление по отношению к телу. Следовательно равнодействующая  $P$  сил  $p_k$  будет при любых положениях тела проходить через одну и ту же неизменно связанную с телом точку  $C$ , являющуюся центром параллельных сил тяжести  $p_k$ . Эта точка и называется *центром тяжести тела*. Таким образом, *центром тяжести твердого тела называется неизменно связанная с этим телом точка, через которую проходит линия действия равнодействующей сил тяжести частиц данного тела при любом положении тела в пространстве*.

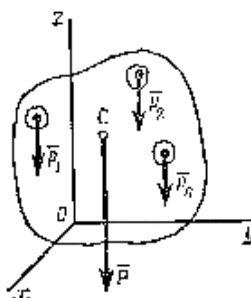


Рис. 1.19

Координаты центра тяжести, как центра параллельных сил, определяются формулами (3) и будут:

$$x_C = \frac{\sum p_k x_k}{P}, \quad y_C = \frac{\sum p_k y_k}{P}, \quad z_C = \frac{\sum p_k z_k}{P}, \quad (1.12)$$

где  $x_k, y_k, z_k$  – координаты точек приложения сил тяжести  $p_k$  частиц тела.

Центр тяжести – это точка геометрическая; она может лежать и вне пределов данного тела (например, для кольца).

Для однородного тела вес  $p_k$  любой его части пропорционален объему  $v_k$  этой части:  $p_k = \gamma v_k$ , а вес  $P$  всего тела пропорционален объему  $V$  этого тела, т.е.  $P = \gamma V$ , где  $\gamma$  – вес единицы объема.

Подставив эти значения  $P$  и  $p_k$  в формулы (1.12), мы заметим, что в числителе  $\gamma$  как общий множитель выносится за скобку и сокращается с  $\gamma$  в знаменателе. В результате из формул (1.12) получим:

$$x_C = \frac{\sum v_k x_k}{V}, \quad y_C = \frac{\sum v_k y_k}{V}, \quad z_C = \frac{\sum v_k z_k}{V}. \quad (1.13)$$

Центр тяжести однородного тела зависит только от его геометрической формы, а от величины  $\gamma$  не зависит. По этой причине точку  $C$ , координаты которой определяются формулами (1.13), называют *центром тяжести объема  $V$* .

Путем аналогичных рассуждений легко найти, что если тело представляет собой однородную плоскую и тонкую пластину, то для нее

$$x_C = \frac{\sum s_k x_k}{S}, \quad y_C = \frac{\sum s_k y_k}{S}, \quad (1.14)$$

где  $S$  – площадь всей пластины, а  $s_k$  – площади ее частей.

Точку, координаты которой определяются формулами (1.14), называют *центром тяжести площади  $S$* .

Точно так же получаются формулы для координат *центра тяжести линии*:

$$x_C = \frac{\sum l_k x_k}{L}, \quad y_C = \frac{\sum l_k y_k}{L}, \quad z_C = \frac{\sum l_k z_k}{L}, \quad (1.15)$$

где  $L$  – длина всей линии,  $l_k$  – длины ее частей.

По формулам (1.15) можно находить центры тяжести изделий из тонкой проволоки постоянного сечения.

Таким образом, центр тяжести однородного тела определяется, как центр тяжести соответствующего объема, площади или линии.

## 2. Кинематика точки и твердого тела

### Предмет кинематики

*Кинематикой называется раздел механики, в котором изучается, движение материальных тел в пространстве с геометрической точки зрения, вне связи с силами, определяющими это движение.*

Слово «кинематика» происходит от греческого слова «кинема», что значит движение.

В теоретической механике изучается простейшая форма движения - механическое движение, т.е. происходящее во времени изменение положения одного тела относительно другого, с которым связана система координат, называемая *системой отсчета*. Систему отсчета можно связать с любым телом. Эта система может быть как движущейся, так и условно неподвижной.

При изучении движений на Земле за условно неподвижную систему отсчета обычно принимают систему осей, неизменно связанных с Землей.

Тело, положение которого по отношению к выбранной системе отсчета не изменяется, находится в состоянии относительного покоя (по отношению к этой системе).

Пространство в механике рассматривается как трехмерное евклидово пространство, и все измерения в нем производятся на основании методов евклидовой геометрии. За единицу длины при измерении расстояний принимается метр.

Время в классической механике предполагается универсальным, т. е. одинаковым во всех системах отсчета и не зависящим от движения одной системы относительно другой. Оно рассматривается как непрерывно изменяющаяся величина. За единицу времени принимается секунда, равная  $\frac{1}{(24 \cdot 3600)}$  средних солнечных суток. Все кинематические величины, характеризующие движение твердого тела и движение отдельной его точки (расстояния, скорости, ускорения и т.д.), рассматриваются как функции времени.

Хотя евклидово пространство и универсальное время отражают реальные свойства пространства и времени лишь приближенно, тем не менее, они позволяют с достаточной для практики точностью изучать движения, скорости которых далеки от скорости света.

Представления древнего мира о движении ограничивались равномерным движением и его скоростью как отношением пути, пройденного телом, ко времени, в течение которого пройден этот путь.

Понятие ускорения введено *Галилеем* (1564-1642) и обобщено для случая криволинейного движения голландским физиком *Гюйгенсом* (1629-1695). Гюйгенс первый применил разложение ускорения на касательную и нормальную составляющие.

Развитие кинематики в XVIII в. связано с работами *Леопарда Эйлера* (1707-1783). Эйлер заложил основы кинематики твердого тела, создал аналитические методы решения задач механики.

Быстрое развитие техники в начале XIX в., в частности машиностроения, потребовало специального исследования геометрических свойств движения тел. Кинематика выделилась в самостоятельный раздел, причем особое значение приобрела кинематика механизмов.

Крупные исследования в области кинематики механизмов и машин принадлежат французским ученым *Понселе* (1788-1876), *Шалю* (1793-1880), *Кориолису* (1792-1843) и русским ученым: основоположнику русской школы теории механизмов и машин акад. *П. Л. Чебышеву* (1821-1894), профессорам *Д. В. Ассуру* (1878-1920), *Н. И. Мерцалову* (1866-1948), *Л. П. Котельникову* (1865-1955) и др.

Все кинематические характеристики движения твердого тела или отдельных его точек одинаковы для «материальных» и «геометрических» точек, поэтому ниже употребляется термин «точка» без пояснения, «материальная» она или «геометрическая».

### Скорость и ускорение точки

*Скорость – это векторная величина, характеризующая быстроту и направление движения точки в данной системе отсчета.*

*Если точка за равные промежутки времени проходит равные отрезки пути, то ее движение называется равномерным.*

Скорость равномерного движения измеряется отношением пути, пройденного точкой за некоторый промежуток времени, к величине этого промежутка времени

$$V = \frac{S}{t} \quad (2.1)$$

*Если же точка за равные промежутки времени проходит неравные пути, то ее движение называется неравномерным.*

Из этого определения ясно, что скорость неравномерного движения есть величина переменная и является функцией времени:

$$V = f(t) \quad (2.2)$$

Часто бывает необходимо определить *среднюю скорость неравномерного движения за некоторый промежуток времени, т. е. скорость такого равномерного движения, при котором точка проходит за определенный промежуток времени такой же путь, как и при неравномерном движении.*

Пусть  $S$  - путь, проходимый точкой при неравномерном движении, и  $t$  - время, за которое точка проходит этот путь. Средняя скорость определится по формуле

$$V_{cp} = \frac{S}{t} \quad (2.3)$$

Рассмотрим точку  $A$ , которая перемещается по заданной траектории по некоторому закону  $S = f(t)$  (рис 2.1).

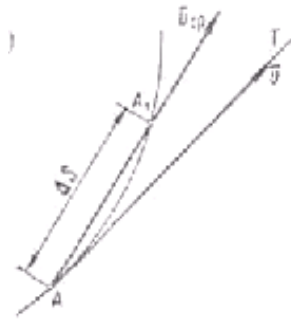


Рис. 2.1. Траектория движения точки

За промежуток времени  $\Delta t$  точка  $A$  переместится в положение  $A_1$ , по дуге  $AA_1$ . Если промежуток времени  $\Delta t$  мал, то дугу  $AA_1$  можно заменить её хордой и найти в первом приближении величину средней скорости движения точки

$$V_{cp} = \frac{\Delta S}{\Delta t} \quad (2.4)$$

Эта скорость направлена по хорде от точки  $A$  к точке  $A_1$ . Мгновенную скорость найдем путем перехода к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}. \quad (2.5)$$

Когда  $\Delta t \rightarrow 0$ , направление хорды в пределе совпадает с направлением касательной к траектории в точке  $A$ .

Итак, величина скорости точки определяется как предел отношения приращения пути к соответствующему промежутку времени при стремлении последнего к нулю, а направление ее совпадает с касательной к траектории в данной точке.

В общем случае при движении по криволинейной траектории скорость точки изменяется и по направлению, и по величине. Изменение скорости в единицу времени определяется ускорением.

Пусть точка  $A$  движется по какой-то криволинейной траектории и за время  $\Delta t$  перешла из положения  $A$  в положение  $A_1$ . Путь, пройденный точкой, представляет дугу  $AA_1$ , ее длину обозначим  $\Delta S$  (рис. 2.2).



Рис. 2.2. Вектора скоростей и ускорений движущейся точки

В положении  $A$  точка имела скорость  $\vec{V}$ , в положении  $A_1$  - скорость  $\vec{V}_1$ . Геометрическую разность скоростей найдем, построив из точки  $A$  вектор  $\vec{V}_1$ . Приращение скорости изображается вектором  $\Delta \vec{V}$ .

Среднее значение ускорения, характеризующего отмеченное изменение скорости, можно найти, поделив вектор приращения скорости  $\Delta V$  на соответствующее время движения  $\Delta t$

$$a_{cp} = \frac{\Delta V}{\Delta t} \quad (2.6)$$

Переходя к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$  получим истинное ускорение точки

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t}. \quad (2.7)$$

Найденное ускорение характеризует изменение скорости и по величине, и по направлению. Для удобства его раскладывают на взаимно перпендикулярные составляющие по касательной и нормали к траектории движения (рис. 1.2):

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n \quad (2.8)$$

Касательная составляющая  $\vec{a}_\tau$  совпадает по направлению со скоростью или противоположна ей. Она характеризует изменение величины скорости и соответственно определяется по формуле

$$a_\tau = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} \quad (2.9)$$

Нормальная составляющая  $\vec{a}_n$  перпендикулярна к направлению скорости точки. Она не может влиять на величину скорости, но зато определяет изменение её направления. Нормальное ускорение определяется по формуле

$$a_n = \frac{V^2}{r}, \quad (2.10)$$

где  $r$  - радиус кривизны траектории в рассматриваемой точке.

Поскольку составляющие  $\vec{a}_\tau$  и  $\vec{a}_n$  взаимно перпендикулярны, полное ускорение может быть найдено по теореме Пифагора

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \quad (2.11)$$

### Способы задания движения точки

Естественный способ задания движения точки, применяемый в случае, когда траектория точки заранее известна. Траекторией может быть как прямая, так и кривая линия (рис. 2.3).

Выберем на траектории неподвижную точку  $O$ , которую назовем началом отсчета дуговой координаты. Положение движущейся точки  $M$  на траектории будем определять дуговой координатой, т. е. расстоянием  $OM = S$  отложенным по траектории от начала отсчета  $O$ .

Расстояния, отложенные в одну сторону от точки  $O$ , будем считать положительными, а в противоположную - отрицательными, т. е. установим направление отсчета дуговой координаты.

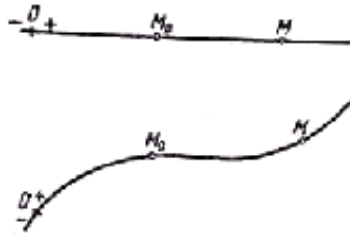


Рис. 2.3. Естественное движение точки

При движении точки  $M$  расстояние  $S$  от этой точки до неподвижной точки  $O$  изменяется с течением времени, т. е. *дуговая координата  $S$  является функцией времени:  $S = f(t)$ .*

Эта зависимость называется *уравнением движения точки*. Если вид функции  $f(t)$  известен, то для каждого значения  $t$  можно найти значение  $S$ , отложить соответствующее расстояние по траектории и указать, где находится движущаяся точка  $M$  в этот момент времени.

Таким образом, *движение точки определено, если известны следующие элементы: траектория точки, начало и направление отсчета дуговой координаты и уравнение движения  $S = f(t)$ .*

Дуговую координату точки не следует смешивать с длиной пути  $\sigma$ , пройденного движущейся точкой. Дуговая координата  $S$  точки  $M$  в некоторый момент времени  $t$  может быть равна пути  $\sigma$ , пройденному точкой за промежуток времени  $[0, t]$ , только в том случае, если движение точки начинается из точки  $O$  и совершается в положительном направлении.

Если в начальный момент времени  $t_0$  точка занимала положение  $M_0$ , а в момент времени  $t$  занимает положение  $M$  (рис. 2.3), то пройденный ею путь за промежуток  $[0, t]$  при движении точки в одном направлении определяется по формуле:

$$\sigma = |M_0 M| = |OM - OM_0| = |S - S_0| \quad (2.12)$$

Изменение дуговой координаты  $S$  за элементарный промежуток времени  $dt$  равно дифференциалу дуги:  $ds = f'(t)dt$ ; при движении точки в сторону возрастания дуг  $dS > 0$ ; при движении точки в противоположную сторону  $dS < 0$ .

Приращение пути  $d\sigma$  (элементарное перемещение точки) всегда положительно, т.е.  $d\sigma = |dS| = |f'(t)|dt$ .

Путь, пройденный точкой за некоторый промежуток времени  $[0, t]$ , определяется как предел суммы элементарных перемещений точки этот промежуток времени:

$$\sigma_{0t} = \int_0^t |f'(t)|dt \quad (2.13)$$

Дуговая координата  $S$  и путь  $\sigma$  выражаются в метрах.

*Координатный способ задания движения точки.* Положение точки  $M$  в системе отсчета  $Oxyz$  определяется тремя декартовыми координатами  $x, y, z$  (рис. 2.4).



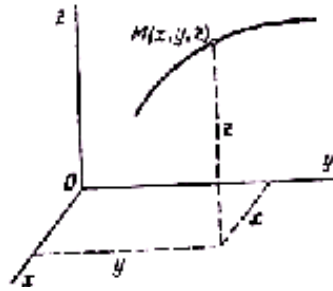


Рис. 2.4. Координаты точки

При движении точки  $M$  её координаты изменяются с течением времени. Следовательно, координаты  $x, y, z$  движущейся точки  $M$  являются функциями времени  $t$ :

$$x = f_1(t); y = f_2(t); z = f_3(t) \quad (2.14)$$

Эти уравнения называются *уравнениями движения точки в декартовых координатах*. Уравнениями определяется движение точки.

Действительно, имея эти уравнения, можно для каждого момента времени  $t$  найти соответствующие координаты  $x, y, z$  и по ним определить положение точки в пространстве в этот момент времени.

Движение точки  $M$  в одной плоскости определяется двумя уравнениями движения  $x = f_1(t); y = f_2(t)$ .

Прямолинейное движение точки  $M$  определяется одним уравнением движения:  $x = f(t)$ .

В этом случае координатный способ задания движения точки сводится к естественному.

Уравнения движения, определяющие координаты точки в любой момент времени, можно рассматривать как *параметрические уравнения траектории точки*. При исключении параметра  $t$  из уравнений движения получаются *уравнения траектории точки в координатной форме*.

Пусть уравнения движения точки  $M$  имеют вид:

$$x = f_1(t); y = f_2(t); z = f_3(t). \quad (2.15)$$

Решив первое уравнение относительно  $t$ , получим  $t = \varphi(x)$ .

Подставив полученное для  $t$  выражение в два других уравнения, найдем уравнения траектории точки в координатной форме:

$$y = f_2[\varphi(x)]; z = f_3[\varphi(x)]. \quad (2.16)$$

Как известно из аналитической геометрии, линии в пространстве соответствуют два уравнения с тремя координатами.

Пусть движение точки  $M$  в плоскости задано уравнениями:

$$x = f_1(t); y = f_2(t). \quad (2.17)$$

Исключив параметр  $t$ , получим уравнение траектории точки в координатной форме:

$$y = f_2[\varphi(x)]. \quad (2.18)$$

Помимо декартовых координат для определения положения точки на плоскости и в пространстве применяют и другие системы координат (полярные, цилиндрические, сферические и др.)

Векторный способ задания движения точки. Положение точки в пространстве однозначно определяется заданием радиуса-вектора  $\vec{r}$ , проведенного из некоторого неподвижного центра  $O$  в данную точку  $M$  (рис. 2.5).

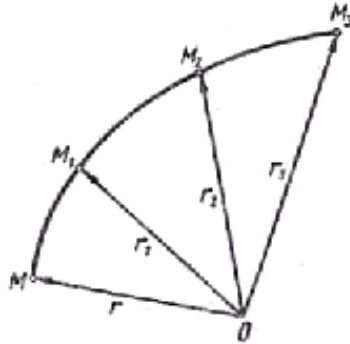


Рис. 2.5. Радиус-векторы движущейся точки

Для определения движения точки нужно знать, как изменяется с течением времени радиус-вектор  $\vec{r}$ , т. е. должна быть задана вектор-функция  $\vec{r}$  аргумента  $t$ :  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ .

*Траектория точки является геометрическим местом концов радиуса-вектора  $\vec{r}$  движущейся точки.*

Линия, образованная концами переменного вектора, начало которого находится в определенной точке пространства, называется *годографом этого вектора*. Следовательно, *траектория точки  $M$  является годографом ее радиуса-вектора  $\vec{r}$ .*

Векторный способ определения движения материальной точки или системы материальных точек широко используется и в кинематике, и в динамике, так как он значительно упрощает многие выводы и иногда подчеркивает физическую сущность явлений.

От векторных формул легко перейти к аналитическим выражениям, обычно более удобным для вычислений.

### Поступательное и вращательное движение твердого тела

*Поступательным движением твердого тела называется такое движение, при котором всякая прямая, неизменно связанная с этим телом, движется, оставаясь параллельной своему начальному положению.*

Примерами поступательного движения тела могут служить: движение кузова автомашины, движущейся по прямолинейному пути, движение поршня двигателя и т. д. Неправильно, однако, думать, что при поступательном движении тела траектории его точек должны быть непременно прямыми линиями. Так, например, спарник  $AB$  (рис. 2.6), соединяющий кривошипы  $O_1A$  и  $O_2B$  двух осей  $O_1$  и  $O_2$ , совершает поступательное движение, хотя его точки по отношению к корпусу паровоза и будут двигаться по окружностям. В самом деле, при вращении кривошипов  $O_1A$  и  $O_2B$  вокруг их осей  $O_1$  и  $O_2$  положение спарника  $AB$  будет изменяться. Но при равенстве длин кривошипов и при длине спарника, равной расстоянию между осями  $O_1O_2$ , четырехугольник  $O_1ABO_2$  будет всегда оставаться

параллелограммом, следовательно, спарник  $AB$  всегда параллелен основанию  $O_1O_2$  т.е. он движется, оставаясь параллельным своему начальному положению. В то же время точки  $A$  и  $B$  спарника, а следовательно, и все остальные его точки по отношению к корпусу паровоза движутся по окружностям, радиус которых равен длине кривошипа.

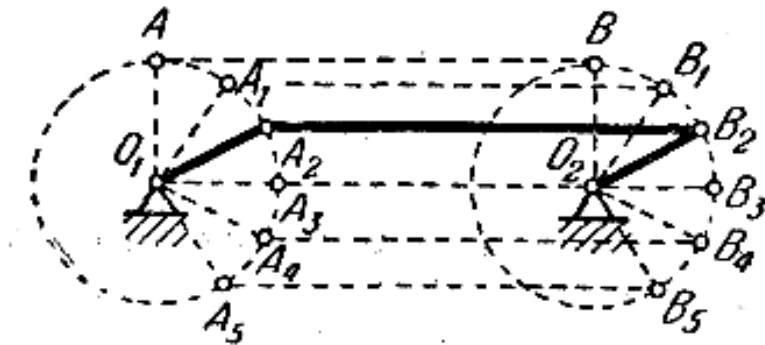


Рис. 2.6. Движение точки в рычажном механизме

Траекториями точек тела при его поступательном движении, могут быть какие угодно кривые. Термин «поступательное движение» применим только к движению тела, но не к движению одной точки. Понятие «движется, оставаясь параллельной своему начальному положению» никак не применимо к точке, не имеющей размеров.

*Вращательным движением называется такое движение твердого тела, при котором все его точки, лежащие на некоторой прямой, называемой осью вращения, остаются неподвижными.*

Для того чтобы осуществить вращательное движение тела, достаточно закрепить неподвижно две какие-нибудь его точки, например, при помощи подшипника  $A$  и подпятника  $B$  (рис. 2.7), тогда прямая, проходящая через эти две точки, будет осью вращения тела.

При вращательном движении тела различные его точки движутся по-разному. Однако и для вращательного движения можно отыскать такие кинематические характеристики, которые были бы общими для всех точек тела.

Пусть какое-нибудь твердое тело (рис. 2.7 в виде цилиндра) вращается вокруг неподвижной оси  $z$ . Проведем через ось вращения  $z$  неподвижную полуплоскость  $P$  и полуплоскость  $Q$ , неизменно связанную с вращающимся телом.

*Угол  $\varphi$  между неподвижной полуплоскостью, проходящей через ось вращения, и полуплоскостью, неизменно связанной с вращающимся телом и также проходящей через ось вращения, называется углом поворота или угловым перемещением данного тела.*

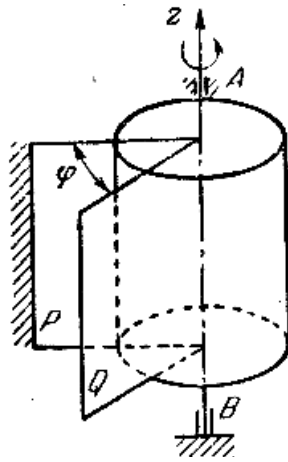


Рис. 2.7. Вращение тела вокруг неподвижной оси

Установим на оси вращения  $z$  положительное направление и условимся считать угол поворота тела положительным, когда он отсчитывается от неподвижной плоскости  $P$  в сторону, противоположную ходу часовой стрелки, если смотреть на него с положительного конца оси вращения. Заданием величины и знака угла поворота вполне определяется положение полуплоскости  $Q$  и неизменно связанного с ней вращающегося тела.

При вращении тела вокруг оси  $z$  угол поворота тела изменяется с течением времени, следовательно, он является некоторой функцией времени

$$\varphi = f(t) \quad (2.19)$$

Уравнение (2.19), устанавливающее зависимость между углом поворота тела и временем его движения, называется уравнением вращательного движения тела.

Угол поворота в механике обычно измеряют в отвлеченных единицах, т. е. в радианах. Иногда в практических задачах угол поворота выражают числом оборотов  $N$  тела. Так как за один оборот тело поворачивается на угол в  $2\pi$  радиан, то  $\varphi = 2\pi N$ .

Мера изменения угла поворота тела с течением времени называется его угловой скоростью.

Пусть в момент  $t$  положение тела определяется углом поворота  $\varphi$ , а в момент  $t + \Delta t$  углом поворота  $\varphi + \Delta\varphi$ .

Отношение приращения  $\Delta\varphi$  угла поворота тела за некоторый промежуток времени  $\Delta t$  к величине этого промежутка времени называется средней за данный промежуток времени угловой скоростью тела.

Обозначая среднюю угловую скорость тела через  $\omega_{cp}$ , будем иметь:

$$\omega_{cp} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \quad (2.20)$$

Очевидно, что угловая скорость и тела в данный момент равна пределу его средней угловой скорости за промежуток времени, начинающийся в этот момент, когда величина промежутка времени стремится к нулю:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \omega_{cp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (2.21)$$

*Угловая скорость тела в данный момент равна производной от угла поворота тела по времени.*

Значение угловой скорости тела может быть положительным или отрицательным в зависимости от того, в какую сторону вращается тело. Когда тело вращается против часовой стрелки, если смотреть с положительного конца оси вращения, то  $\Delta\varphi > 0$ ,  $\frac{d\varphi}{dt} > 0$  и угловая скорость  $\omega$  положительна. Если тело вращается по часовой стрелке, то угловая скорость отрицательна. Следовательно, знак угловой скорости указывает, в какую сторону в данный момент вращается тело. Размерность угловой скорости  $\text{рад/с}$  или  $\text{с}^{-1}$ .

На практике часто угловую скорость тела выражают не в радианах в секунду, а в оборотах в минуту. При этом обычно угловую скорость, выраженную числом оборотов в минуту, обозначают буквой  $n$ . Нетрудно найти зависимость между  $\omega$  и  $n$ . Так как один оборот тела соответствует его повороту на угол в  $2\pi$  радиан, то

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30} \text{ рад/с.} \quad (2.22)$$

Нужно помнить, что в формуле (1.26) всегда  $\omega$  выражается в  $\text{рад/сек}$ ,  $n$  - в  $\text{об/мин}$ .

Если тело вращается неравномерно, то его угловая скорость  $\omega$  изменяется с течением времени и является, следовательно, также некоторой функцией времени  $\omega = f'(t)$ .

*Величина, характеризующая изменение угловой скорости тела с течением времени, называется его угловым ускорением.*

Пусть в момент времени  $t$  тело имело угловую скорость  $\omega$ , а в момент  $t + \Delta t$  - угловую скорость  $\omega + \Delta\omega$ .

*Отношение приращения  $\Delta\omega$  угловой скорости тела за промежуток времени  $\Delta t$  к этому промежутку времени называется средним угловым ускорением тела за этот промежуток времени  $\Delta t$ .*

Обозначая среднее угловое ускорение тела через  $\varepsilon_{cp}$ , будем иметь:

$$\varepsilon_{cp} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad (2.23)$$

При  $\Delta t \rightarrow 0$  среднее угловое ускорение приближается к пределу, называемому мгновенным угловым ускорением тела.

Обозначая угловое ускорение тела в данный момент буквой  $\varepsilon$ , будем иметь:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon_{cp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad (2.24)$$

*Угловое ускорение тела в данный момент равно первой производной от угловой скорости тела по времени или второй производной от угла его поворота по времени:*

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad (2.25)$$

Если знаки угловой скорости и углового ускорения тела совпадают, то его угловая скорость увеличивается по абсолютному значению и тело, следовательно,

вращается ускоренно. Если же знаки их различны, то угловая скорость уменьшается по абсолютному значению и тело вращается замедленно.

Размерность углового ускорения  $\text{рад/с}^2$  или  $\text{с}^{-2}$ .

### Скорости и ускорения точек вращающегося тела

Так как *при вращении твердого тела* вокруг неподвижной оси расстояние каждой из его точек до оси вращения должно оставаться неизменным, то очевидно, что все его точки описывают в этом движении окружности, плоскости которых перпендикулярны к оси вращения. Центры этих окружностей лежат на оси вращения и радиус каждой из них равен расстоянию соответствующей точки тела до оси вращения.

Очевидно, что радиусы всех этих окружностей поворачиваются за один и тот же промежуток времени  $\Delta t$  на один и тот же угол  $\Delta\varphi$ , равный приращению угла  $\varphi$  поворота тела за этот промежуток времени, но точки, лежащие на разных расстояниях от оси вращения (точки  $M_1$  и  $M_2$  на рис. 1.10), опишут при этом дуги различной длины.

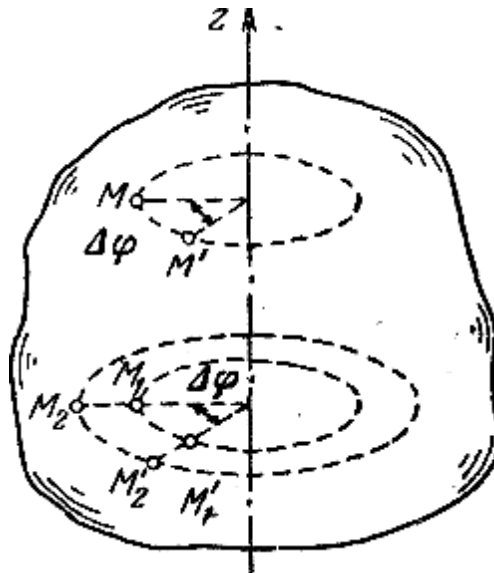


Рис. 2.8. Положение точек твердого тела при вращательном движении

Зная угловую скорость  $\omega$  тела и расстояние  $R$  какой-нибудь точки  $M$  тела от оси вращения, легко найти и скорость  $V$  этой точки.

Пусть за промежуток времени  $\Delta t$ , соответствующий приращению  $\Delta\varphi$  угла поворота тела, данная точка перемещается из положения  $M$  в положение  $M'$  (рис. 2.8). Длина дуги  $MM'$ , пройденной точкой  $M$  по ее траектории, равна приращению  $\Delta S$  дуговой координаты  $S$  этой точки.

Алгебраическое значение скорости точки, как известно, равно производной от ее дуговой координаты по времени

$$V = \frac{dS}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}. \quad (2.26)$$

Но длина дуги окружности равна ее радиусу  $R$ , умноженному на соответствующий центральный угол в радианах, т. е.  $\Delta S = R \cdot d\varphi$ .

Подставляя значение  $\Delta S$  в предыдущее равенство, получаем:

$$V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R \cdot \Delta \varphi}{\Delta t} = R \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = R \frac{d\varphi}{dt} = R\omega. \quad (2.27)$$

*Алгебраическое значение скорости точки вращающегося тела равно произведению угловой скорости тела на расстояние данной точки от оси вращения:*

$$V = \omega R \quad (2.28)$$

Направлен вектор  $V$  скорости точки по касательной к траектории точки в сторону вращения тела. Иными словами, этот вектор перпендикулярен к радиусу, соединяющему ось вращения с рассматриваемой точкой. Из формулы (2.28) следует, что *скорости точек вращающегося тела пропорциональны расстояниям этих точек от оси вращения.*

Так как в формуле  $\Delta S = R \cdot d\varphi$  приращение угла  $d\varphi$  должно быть обязательно выражено в радианах, то и угловая скорость в формуле (2.28) должна обязательно выражаться в  $c^{-1}$ ,  $мин^{-1}$  и т. д., но не в *об/сек* или в *об/мин*. Только в этом случае будет получаться принятая размерность скорости  $V$ .

При любом вращательном движении тела скорости  $V$  его точек непременно изменяются (только по направлению при равномерном вращательном движении или и по направлению и по модулю при неравномерном вращательном движении), следовательно, точки вращающегося тела всегда движутся с некоторым ускорением.

Ускорение  $a$  точки вращающегося тела, как и ускорение всякого криволинейного движения точки, может быть разложено на касательное ускорение  $a_\tau$ , часто называемое в этом случае *вращательным ускорением*, и нормальное ускорение  $a_n$ , называемое в этом случае *центростремительным ускорением*.

Полагая для касательного и нормального ускорения точки  $V = \omega R$  и радиус кривизны  $\rho$  траектории равным радиусу окружности, описываемой точкой, будем иметь:  $a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt} \omega R = R \frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon$ ,  $a_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{R^2 \omega^2}{R} = R\omega^2$ .

*Величина вращательного ускорения точки равна произведению углового ускорения тела на расстояние данной точки от оси вращения:*

$$a_\tau = \varepsilon R \quad (2.29)$$

*Модуль центростремительного ускорения точки равен квадрату угловой скорости тела, умноженному на расстояние данной точки от оси вращения:*

$$a_n = \omega^2 R \quad (2.30)$$

Направление вращательного ускорения точки совпадает с направлением ее скорости в случае ускоренного вращения тела (рис. 2.9 а) и направлено в сторону, противоположную скорости, в случае замедленного вращения (рис. 2.9 б).

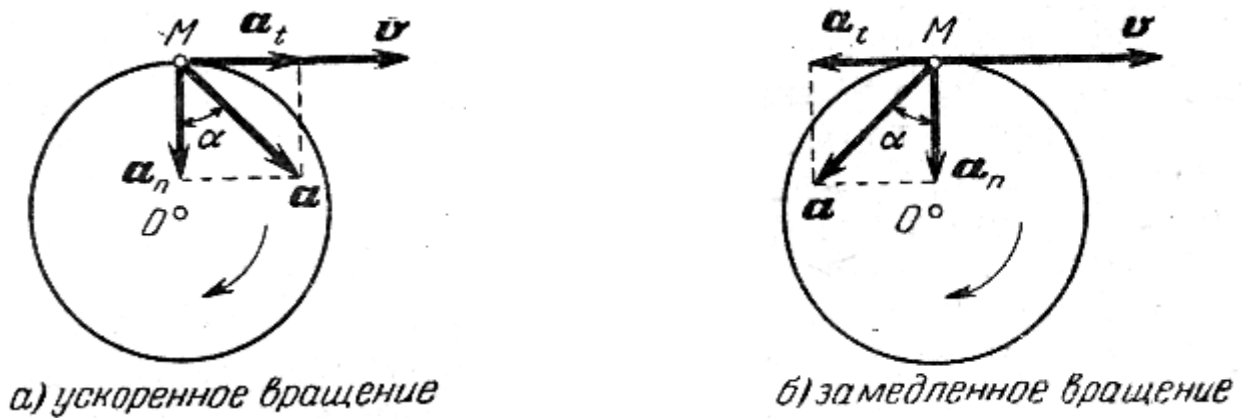


Рис. 2.9. Вращение точки

Центростремительное ускорение точки всегда направлено к центру окружности, описываемой точкой. Зная вращательную и центростремительную составляющие ускорения  $a$  точки, всегда можно найти величину и направление этого ускорения, изображаемого диагональю прямоугольника, построенного на векторах  $a_t$  и  $a_n$  (рис. 2.9).

Модуль этого ускорения

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{(\varepsilon R)^2 + (\omega^2 R^2)^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (2.31)$$

Острый угол  $\alpha$  между направлением ускорения  $a$  точки и направлением радиуса (внутренней нормали к траектории) найдется из формулы  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_t}{a_n} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}$ .

### Плоскопараллельное движение твердого тела

*Плоским или плоскопараллельным движением твердого тела называется такое движение, при котором каждая точка тела движется в плоскости, параллельной некоторой неподвижной плоскости.*

Плоская фигура, образованная сечением тела этой неподвижной плоскостью  $Q$ , во все время движения остается в этой плоскости (рис. 2.10). Установим свойства плоского движения твердого тела.

Рассмотрим движение точек тела, расположенных на одном перпендикуляре к неподвижной плоскости  $Q$ . Точка  $M_1$  движется в плоскости  $Q_1$ , а точка  $M_2$  - в плоскости  $Q_2$ ; обе плоскости параллельны неподвижной плоскости  $Q$ .

При движении тела отрезок  $M_1M_2$  остается перпендикулярным плоскости  $Q$ , т. е. остается параллельным своему начальному положению. Это значит, что все точки этого перпендикуляра, аналогично точкам тела, движущегося поступательно, описывают тождественные и параллельные между собой траектории и в каждый момент времени имеют геометрически равные скорости и ускорения, т. е. траектории  $A_1B_1$ ,  $A_2B_2$ ,  $AB$  точек тела  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M$  тождественны и параллельны, их скорости  $\vec{V} = \vec{V}_2 = \vec{V}$  и ускорения  $\vec{a}_1 = \vec{a}_2 = \vec{a}$  также равны.

Основываясь на этом свойстве плоского движения твердого тела, устанавливаем, что движение каждой точки плоской фигуры в неподвижной



плоскости  $Q$  определяет собой движение всех точек твердого тела, расположенных на перпендикуляре к плоскости  $Q$ , восставленном в этой точке. Это позволяет свести изучение плоского движения твердого тела к изучению движения плоской фигуры в ее плоскости.

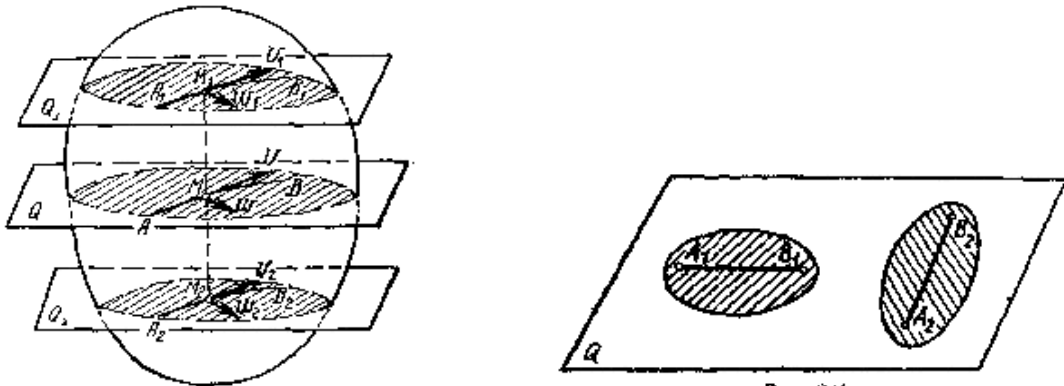


Рис. 2.10. Движение плоской фигуры

Так как положение плоской фигуры на плоскости вполне определяется положением двух ее точек или положением отрезка, соединяющего две точки этой фигуры (рис. 2.11), то движение плоской фигуры в ее плоскости можно изучать как движение прямолинейного отрезка в этой плоскости. Будем считать, что движение плоской фигуры происходит в плоскости рисунка и, следовательно, рисунок является натуральным изображением фигуры.

Предположим, что плоская фигура переместилась на плоскости из положения  $I$  в положение  $II$  (рис. 2). Отметим два положения отрезка  $AB$ , принадлежащего фигуре. Покажем, что перемещение фигуры можно осуществить совокупностью двух перемещений: поступательного перемещения и поворота.

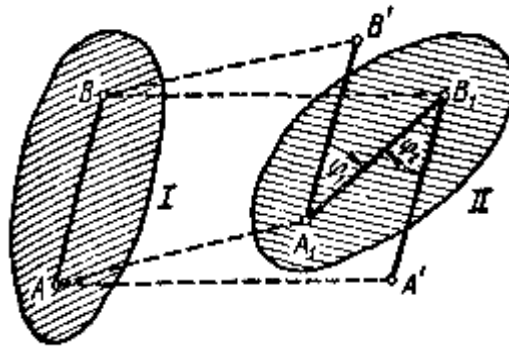


Рис. 2.11. Разложение плоского движения

*1-й вариант.* Переместим фигуру поступательно из положения  $AB$  в положение  $A_1 B'$ , т. е. так, чтобы точка  $A$  переместилась в новое положение  $A_1$ , а точка  $B$  описала траекторию, тождественную траектории точки  $A$ . Затем повернем фигуру вокруг точки  $A_1$ , на угол  $\varphi_1$ , так, чтобы точка  $B'$  совпала с точкой  $B_1$ .

*2-й вариант.* Переместим фигуру поступательно из положения  $AB$  в положение  $A'B_1$ , а затем повернем ее вокруг точки  $B_1$ , на угол  $\varphi_2$  так, чтобы точка  $A'$  совпала с точкой  $A_1$ .

Вариантов перемещений может быть столько, сколько точек плоской фигуры, т. е. бесчисленное множество. Как видно, поступательное перемещение плоской фигуры различно в различных вариантах, а угол поворота и направление поворота одинаковы:

$$\varphi_1 = \varphi_2$$

Из этого следует, что всякое непоступательное перемещение плоской фигуры в ее плоскости можно рассматривать как совокупность двух перемещений: поступательного перемещения плоской фигуры вместе с произвольной точкой, называемой полюсом, и поворота вокруг полюса. При этом поступательное перемещение зависит от выбора полюса, а числовая величина угла поворота и направление поворота от выбора полюса не зависят.

Из вышеизложенного следует, что действительное движение плоской фигуры в ее плоскости в каждый момент времени можно рассматривать как совокупность поступательного движения и вращения. Поступательная часть движения фигуры зависит от выбора полюса и определяется его движением. как совокупность поступательного движения и вращения. Поступательная часть движения фигуры зависит от выбора полюса и определяется его движением.

Приняв за полюс некоторую точку  $O$  и обозначив  $x_0, y_0$  ее координаты в неподвижной системе  $xOy$  (рис. 2.12), можно определить движение полюса  $O$ , а следовательно, и поступательное движение всей фигуры уравнениями  $x_0 = f_1(t)$  и  $y_0 = f_2(t)$ .

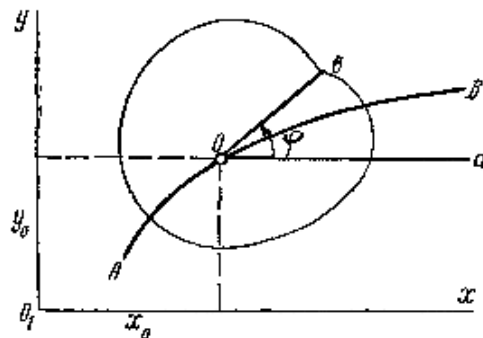


Рис. 2.12.

Для получения угла, характеризующего вращательную часть движения плоской фигуры, проведем через полюс  $O$  две полупрямые  $Oa$  и  $Ob$ , из которых  $Oa$  не принадлежит плоской фигуре и движется поступательно вместе с полюсом  $O$ , а  $Ob$  принадлежит этой фигуре и вместе с ней вращается вокруг полюса  $O$ .

Обозначив  $\angle aOb = \varphi$ , можно определить вращательное движение фигуры уравнением вращения  $\varphi = f_3(t)$ . Таким образом, движение плоской фигуры в ее плоскости, а следовательно, и движение всего тела определяются тремя уравнениями, называемыми *уравнениями плоского движения твердого тела*:

$$x_0 = f_1(t), \quad y_0 = f_2(t), \quad \varphi = f_3(t). \quad (2.32)$$

### 3. Динамика

#### Предмет динамики. Задачи динамики.

*Динамикой называется раздел механики, в котором изучается движение материальных тел в зависимости от действующих на них сил.*

Динамика представляет собой наиболее общий раздел механики, имеющий особое значение для решения многих практических задач в различных областях техники.

Основоположителем динамики явился великий ученый Галилей (1564—1642). Он впервые ввел в механику понятие скорости и ускорения движущейся точки при неравномерном прямолинейном движении и установил законы падения тел в пустоте. Галилей сформулировал первый закон динамики — закон инерции, установил, что движение тела, брошенного под углом к горизонту в пустоте, совершается по параболе. Голландский ученый Гюйгенс (1629—1695) ввел понятие момента инерции, создал теорию маятника, изобрел часы. Обобщив понятие ускорения на случай криволинейного движения точки, Гюйгенс установил понятие центростремительной силы.

Начатая Галилеем работа по созданию динамики была завершена великим английским ученым Ньютоном (1643—1727), который в своем знаменитом сочинении «*Philosophiae naturalis principia mathematica*» (1686) сформулировал основные законы классической механики и на основе этих законов дал систематическое изложение динамики. Ньютон открыл закон всемирного тяготения.

Особое значение имел установленный Ньютоном закон равенства действия и противодействия, позволивший перейти от динамики материальной точки к динамике механической системы.

Развивая идею Декарта (1596—1650) о сохраняемости количества движения, Ньютон установил, что изменение количества движения механической системы определяется лишь внешними силами.

Область применения законов классической механики, созданной Галилеем и Ньютоном, как показали новейшие открытия конца XIX и первой четверти XX вв., ограничена. Эти законы не согласуются с опытом при изучении движения тел, скорость которых одного порядка со скоростью света. Новая релятивистская механика (теория относительности), созданная в начале XX века немецким физиком Альбертом Эйнштейном (1879—1955), коренным образом изменила представления механики о пространстве, времени, массе и энергии.

Однако результаты, полученные на основе законов классической и релятивистской механики для тел, скорость которых не соизмеримо меньше скорости света, практически совпадают.

В свете теории относительности классическая механика Галилея – Ньютона приобрела характер ее частного случая и сохраняет свое значение и в настоящее время, являясь научно-теоретической базой большинства отраслей техники.

На основе законов Галилея–Ньютона в дальнейшем доказывались теоремы и устанавливались принципы механики, составляющие содержание современного

курса теоретической механики.

Теорема об изменении кинетической энергии или, как ее ранее называли, теорема живых сил была сформулирована Иваном Бернулли (1667–1748) и Даниилом Бернулли (1700–1782). Теорема об изменении момента количества движения установлена почти одновременно (1746) Эйлером и Даниилом Бернулли. В 1716 г. Я. Германом (1678–1733), академиком Петербургской Академии наук, установлен принцип механики, дающий общий метод, с помощью которого уравнения динамики придается по форме вид уравнений статики, получивший название петербургского принципа (метод кинетостатики)

В 1737 г. Эйлер обобщил этот принцип и применил его для изучения колебаний гибких тел.

В 1743 г. Даламбер высказал принцип, получивший название начала Даламбера, послуживший базой построения механики систем, подчиненных связям. Начало Даламбера позволило расширить применение принципа Германа – Эйлера на случай сложных систем, состоящих из значительного числа связанных между собой тел.

Лагранж (1736–1813) связал принцип Германа – Эйлера – Даламбера с общим принципом статики — принципом возможных перемещений и придал ему удобную для практического применения форму.

Впервые принцип возможных перемещений был установлен Стевином (1548–1620).

Галилей дополнил исследования Стевина рассуждением о наклонной плоскости и дал знаменитую формулировку золотого правила механики: *что выигрывается в силе, то теряется в скорости.*

Над строго научным доказательством принципа возможных перемещений работали Иван Бернулли, Фурье, Пуассон, Ампер и Лагранж.

Академик М. В. Остроградский (1801–1862) обобщил принцип возможных перемещений и применил его к решению многих новых задач механики.

Дифференциальные уравнения движения механической системы в обобщенных координатах были получены Лагранжем и носят его имя.

Уравнения Лагранжа определяют движение механической системы в наиболее общей форме. Эти уравнения Лагранж применил к исследованию малых колебаний системы, имеющих большое практическое значение.

В XIX и XX столетиях большое значение для развития динамики приобретают работы отечественных ученых, к числу которых в первую очередь следует отнести А. М. Ляпунова, Н. Е. Жуковского, С. А. Чаплыгина, И. В. Мещерского, К. Э. Циолковского, А. Н. Крылова и ряда других.

А. М. Ляпунов (1857–1918) – создатель современной теории устойчивости движения. Ему принадлежит также исследование устойчивости форм равновесия вращающейся жидкости, имеющее огромное значение для научной космогонии.

Н. Е. Жуковский (1847–1921) является основателем одной из важнейших областей механики – аэродинамики. Кроме того, он написал большое число выдающихся работ по гидромеханике, гидравлике и динамике твердого тела. Работа Н. Е. Жуковского «О присоединенных вихрях» послужила теоретической основой для определения подъемной силы крыла самолета.

Академик С. А. Чаплыгин (1869–1942) – ученик Н. Е. Жуковского также сыграл большую роль в развитии русской авиации. Он вывел обобщенные уравнения движения, в которых ограничивающие условия накладываются не только на положение точек, но и на их скорости. Созданная Чаплыгиным теория неустановившегося движения крыла самолета и аэродинамика больших скоростей является фундаментом расчетов самолета.

И. В. Мещерский (1859–1935) – автор известного сборника задач по теоретической механике, в работе «Динамика точки переменной массы» (1897) открыл новую отрасль механики – механику тел переменной массы, одним из разделов которой является теория движения реактивных аппаратов.

Создание основ расчета реактивного движения принадлежит выдающемуся русскому ученому и изобретателю К. Э. Циолковскому (1857–1935), разработавшему конструкцию первой космической ракеты.

Труды И. В. Мещерского и К. Э. Циолковского лежат в основе теории движения современных многоступенчатых ракет, позволивших Запустить искусственные спутники Земли, космические корабли-спутники, послать автоматические межпланетные станции к Луне и в сторону Венеры. 12 апреля 1961 г. советские ученые и инженеры осуществили давнишнюю мечту человечества, запустив космический корабль с первым космонавтом Ю. А. Гагариным, открыв этим эру непосредственного проникновения человека в космическое пространство.

Работы академика А. Н. Крылова (1863–1945) по теории корабля, теории гироскопов, теории колебаний, уравнениям математической физики, внешней баллистике и теории упругости оказали большое влияние на развитие механики в нашей стране и создали ему мировую славу.

### **Законы механики Галилея-Ньютона.**

В основе динамики лежат законы, впервые сформулированные Ньютоном и названные им аксиомами, или законами движения (*Axiomata sive leges motus*).

#### **1. Закон инерции**

*Материальная точка сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения, пока воздействие других тел не изменит это состояние.*

#### **2. Закон пропорциональности силы и ускорения**

*Ускорение материальной точки пропорционально приложенной к ней силе и имеет одинаковое с ней направление.*

#### **3. Закон равенства действия и противодействия**

*Всякому действию соответствует равное и противоположно направленное противодействие.*

#### **4. Закон независимости действия сил**

*Несколько одновременно действующих на материальную точку сил сообщают точке такое ускорение, какое сообщила бы ей одна сила, равная их геометрической сумме.*

### Задачи динамики.

*Первая задача динамики.* Зная массу точки  $m$  и уравнения ее движения ( $x = f_1(t)$ ;  $y = f_2(t)$ ;  $z = f_3(t)$ ), можем найти модуль и направление равнодействующей сил, приложенных к точке.

Эта задача легко решается следующим путем:

$$\begin{aligned} P_x &= mx'' , \quad P_y = my'' , \quad P_z = mz'' ; \\ P &= \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2} ; \\ \cos(P, i) &= \frac{P_x}{P}, \quad \cos(P, j) = \frac{P_y}{P}, \quad \cos(P, k) = \frac{P_z}{P} . \end{aligned}$$

*Вторая задача динамики.* Зная силы, действующие на материальную точку, ее массу  $m$ , а также начальное положение точки и ее начальную скорость, получить уравнения движения точки.

Для решения этой задачи необходимо в левую часть уравнений (3.10) подставить значение массы  $m$ , а в правую часть — суммы проекций приложенных сил и полученные уравнения дважды проинтегрировать по времени.

Эта задача имеет большое практическое значение и в общем случае является более сложной, чем первая.

При интегрировании каждого дифференциального уравнения движения точки появляются две постоянные, а потому при интегрировании трех дифференциальных уравнений движения точки будет шесть постоянных. Значения этих постоянных определяют по начальным условиям движения: значениям трех координат точки и проекций ее скорости на три оси в некоторый момент времени, обычно (но не обязательно) в начальный момент.

Пусть в начальный момент времени  $t = t_0$  известны координаты точки и проекции ее скорости на оси, т. е.:

$$\left. \begin{aligned} t &= t_0 ; \quad x = x_0 ; \quad y = y_0 ; \quad z = z_0 ; \\ x' &= x'_0 ; \quad y' = y'_0 ; \quad z' = z'_0 . \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Эти значения подставляют в уравнения, представляющие собой общие решения дифференциальных уравнений движения точки.

Из этих уравнений определяют постоянные интегрирования  $C_1, C_2, \dots, C_6$  в зависимости от начальных координат и проекций начальной скорости. Подставляя найденные значения постоянных интегрирования в общее решение дифференциальных уравнений движения точки, получают уравнения движения точки в виде уравнения 3.12:

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(t, x_0, y_0, z_0, x'_0, y'_0, z'_0), \\ y &= f_2(t, x_0, y_0, z_0, x'_0, y'_0, z'_0), \\ z &= f_3(t, x_0, y_0, z_0, x'_0, y'_0, z'_0). \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

## Импульс силы. Количество движения материальной точки и механической системы.

Если постоянная по модулю и направлению сила  $P$  действует в течение промежутка времени  $t = t_2 - t_1$  ее импульсом за этот промежуток времени является вектор

$$\bar{S} = \bar{P} \cdot t \quad (3.3)$$

Направление этого вектора совпадает с направлением силы, а его модуль равен произведению модуля силы на время ее действия, т. е.

$$S = P \cdot t$$

*Импульс силы характеризует передачу материальной точке механического движения со стороны действующих на нее тел за данный промежуток времени.*

Импульс переменной силы  $S = \int_0^t P dt$ .

Модуль и направление импульса переменной силы можно определить по способу проекций.

Просуммировав проекции элементарных импульсов и перейдя к пределу, получим определенные интегралы по переменной  $t$ , представляющие собой проекции импульса  $S$  на оси координат:

$$S_x = \int_{t_1}^{t_2} P_x dt, \quad S_y = \int_{t_1}^{t_2} P_y dt, \quad S_z = \int_{t_1}^{t_2} P_z dt$$

*Количеством движения материальной точки называется вектор, имеющий направление скорости и модуль, равный произведению массы  $m$  на скорость ее движения  $V$ .*

Количество движения, зависящее от массы точки и ее скорости, является мерой механического движения.

Понятие количества движения было введено в механику Декартом и положено в основу механики Ньютоном. Единицей измерения количества движения является  $1 \text{ кг} \cdot \text{м/с} = 1 \text{ Н} \cdot \text{с}$ .

*Количеством движения механической системы называется вектор, равный геометрической сумме (главному вектору) количеств движения всех материальных точек этой системы.*

Если отдельная точка системы  $M_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) имеет массу  $m_i$ , и скорость  $V_i$ , то вектор количества движения системы  $Q$

$$Q = \sum m_i V_i \quad (3.4)$$

Преобразуем выражение (3.4):

$$\begin{aligned} Q &= \sum m_i V_i = \sum m_i \frac{dr_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum m_i r_i \\ \sum m_i r_i &= m r_C \\ Q &= \frac{d}{dt} (m r_C) = m \frac{dr_C}{dt} = m V_C \\ Q &= m V_C \end{aligned} \quad (3.5)$$

Выражение (3.5) показывает, что вектор количества движения механической системы имеет модуль, равный произведению массы системы на скорость ее центра масс и направление этой скорости.

Проецируя вектор  $Q = \sum m_i r_i = m r_c$  получим

$$\begin{cases} Q_x = \sum m_i V_{ix} = m V_{cx} \\ Q_y = \sum m_i V_{iy} = m V_{cy} \\ Q_z = \sum m_i V_{iz} = m V_{cz} \end{cases} \quad (3.6)$$

Проекция количества движения механической системы на каждую координатную ось, равная сумме проекций количеств движения всех точек системы на эту ось, определяется произведением массы системы на проекцию скорости центра масс на эту же ось.

### Кинетический момент системы

Кинетический момент механической системы  $\bar{K}_O$  относительно неподвижного центра  $O$  является мерой движения системы вокруг этого центра. При решении задач обычно применяются не сам вектор  $\bar{K}_O$ , а его проекции на оси неподвижной системы координат, которые называются кинетическими моментами относительно оси. Например,  $K_z$  - кинетический момент системы относительно неподвижной оси  $Oz$ .

Кинетический момент механической системы складывается из кинетических моментов точек и тел, входящих в эту систему. Рассмотрим способы определения кинетического момента материальной точки и твердого тела при различных случаях их движения.

Для материальной точки с массой  $m_k$ , имеющей скорость  $\bar{V}_k$ , кинетический момент относительно некоторой оси  $Oz$  определяется как момент вектора количества движения этой точки относительно выбранной оси:

$$K_z = m_z (m_k \bar{V}_k) = \bar{r}_k \times (m_k \bar{V}_k).$$

Кинетический момент точки считается положительным, если со стороны положительного направления оси движение точки происходит против часовой стрелки.

Если точка совершает сложное движение, для определения ее кинетического момента следует вектор количества движения  $m_k \bar{V}_k$  рассматривать как сумму количеств относительного и переносного движений

$$m_k \bar{V}_k = m_k \bar{V}_{kr} + m_k \bar{V}_{ke}.$$

Тогда

$$K_z = m_z (m_k \bar{V}_k) = m_z (m_k \bar{V}_{kr}) + m_z (m_k \bar{V}_{ke}).$$

Но  $V_{ke} = \omega h_e$ , где  $h_e$  - расстояние от точки до оси вращения, и

$$m_z (m_k \bar{V}_{ke}) = m_k \omega h_e \cdot h_e = m_k h_e^2 \omega.$$



## Работа силы. Мощность. Кинетическая энергия материальной точки и механической системы

Для характеристики действия, оказываемого силой на тело при некотором его перемещении, вводится понятие о работе силы, широко используемое не только в механике. Сначала введем понятие об элементарной работе.

Элементарной работой силы  $\vec{F}$ , приложенной в точке  $M$  (рис. 3.1), называется скалярная величина

$$dA = F_\tau ds, \quad (3.7)$$

где  $F_\tau$  — проекция силы  $\vec{F}$  на касательную  $M\tau$  к траектории точки  $M$ , направленную в сторону перемещения этой точки (или проекция  $\vec{F}$  на направление скорости  $\vec{V}$  точки  $M$ ;  $ds$  — модуль элементарного перемещения точки  $M$ .

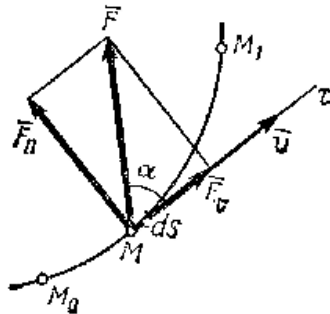


Рис. 3.1.

Такое определение соответствует представлению о работе как о мере того действия силы, которое приводит к изменению модуля скорости точки. Если разложить силу  $\vec{F}$  на составляющие  $\vec{F}_\tau$  и  $\vec{F}_n$ , то изменять модуль скорости будет  $\vec{F}_\tau$ , так как  $F_\tau = ma_\tau = m \frac{dV}{dt}$  (составляющая  $\vec{F}_n$  изменяет или направление вектора  $\vec{V}$ , или при несвободном движении — силу давления на связь).

Замечая, что  $F_\tau = F \cos \alpha$ , где  $\alpha$  — угол между  $\vec{F}$  и  $M\tau$ , получим из (3.7) другое выражение для  $dA$ :

$$dA = F ds \cos \alpha \quad (3.8)$$

Если угол  $\alpha$  острый, то работа положительна. В частности, при  $\alpha = 0$  элементарная работа  $dA = F ds$ .

Если угол  $\alpha$  тупой, то работа отрицательна. В частности, при  $\alpha = 180^\circ$  элементарная работа  $dA = -F ds$ .

Если угол  $\alpha = 90^\circ$ , т. е. если сила направлена перпендикулярно перемещению, то элементарная работа силы равна нулю.

Знак работы имеет следующий смысл: работа положительна, когда составляющая  $\vec{F}_\tau$  направлена в сторону движения (сила ускоряет движение); работа отрицательна, когда составляющая  $\vec{F}_\tau$  направлена противоположно направлению движения (сила замедляет движение).

Если учесть,  $ds = |d\vec{r}|$ , где  $d\vec{r}$  – вектор элементарного перемещения точки, и воспользоваться известным из векторной алгебры понятием о скалярном произведении двух векторов, то равенство (3.8) можно представить в виде

$$dA = \vec{F} d\vec{r} \quad (3.9)$$

Следовательно, *элементарная работа силы равна скалярному произведению силы на вектор элементарного перемещения точки ее приложения.*

Если в формуле (3.9) выразить скалярное произведение через проекции векторов  $\vec{F}$  и  $\vec{r}$  на координатные оси и учесть, что  $r_x = x$ ,  $r_y = y$ ,  $r_z = z$ , то получим *аналитическое выражение элементарной работы*

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz, \quad (3.10)$$

в котором  $x$ ,  $y$ ,  $z$  – координаты точки приложения силы  $F$ .

### *Мощность.*

Мощностью называется величина, определяющая работу, совершаемую силой в единицу времени. Если работа совершается равномерно, то мощность  $N = dA/dt$ , где  $t$  – время, в течение которого произведена работа  $A$ . В общем случае

$$N = dA/dt = F_\tau \frac{ds}{dt} = F_\tau V$$

Следовательно, *мощность равна произведению касательной составляющей силы на скорость.*

Единицей измерения мощности в СИ является *ватт* ( $1 \text{ Вт} = 1 \text{ Дж/с}$ ). В технике за единицу мощности часто принимается 1 л. с, равная 736 Вт.

Работу, произведенную машиной, можно измерять произведением ее мощности на время работы. Отсюда возникла употребительная в технике единица измерения работы *киловатт·час*.

Введем понятие еще об одной основной динамической характеристике движения – о кинетической энергии. *Кинетической энергией материальной точки называется скалярная величина  $mV^2/2$ , равная половине произведения массы точки на квадрат ее скорости.*

Единица измерения кинетической энергии та же, что и работы (в СИ – 1 Дж).

*Кинетической энергией системы называется скалярная величина  $T$ , равная сумме кинетических энергий всех точек системы:*

$$T = \frac{m_k V_k^2}{2}.$$

Кинетическая энергия является характеристикой и поступательного, и вращательного движений системы. Главное отличие величины  $T$  от введенных ранее характеристик количества движения и кинетического момента состоит в том, что кинетическая энергия является величиной скалярной и притом существенно положительной. Поэтому она не зависит от направлений движения частей системы и не характеризует изменений этих направлений.

Отметим еще следующее важное обстоятельство. Внутренние силы действуют на части системы по взаимно противоположным направлениям. По

этой причине они, как мы видели, не изменяют векторных характеристик количества движения и кинетического момента. Но если под действием внутренних сил будут изменяться модули скоростей точек системы, то при этом будет изменяться и величина  $T$ . Следовательно, кинетическая энергия системы будет отличаться от величин количества движения и кинетического момента еще и тем, что на её изменение влияет действие и внешних и внутренних сил.

### Момент инерции тела относительно оси. Радиус инерции.

Положение центра масс характеризует распределение масс системы не полностью. Например (рис. 3.2), если расстояния  $h$  от оси  $Oz$  каждого из одинаковых шаров  $A$  и  $B$  увеличить на одну и ту же величину, то положение центра масс системы не изменится, а распределение масс станет другим, и это скажется на движении системы (вращение вокруг оси  $Oz$  при прочих равных условиях будет происходить медленнее).

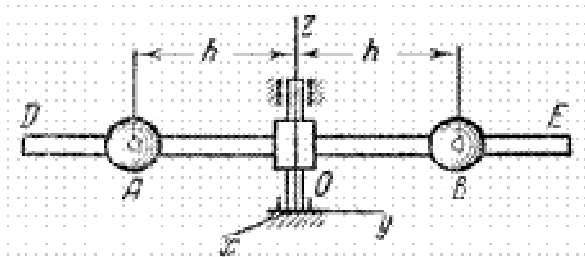


Рис. 3.2.

Поэтому в механике вводится еще одна характеристика распределения масс - момент инерции. *Моментом инерции тела (системы) относительно данной оси  $Oz$  (или осевым моментом инерции) называется скалярная величина, равная сумме произведений масс всех точек тела (системы) на квадраты их расстояний от этой оси*

$$I_Z = \sum m_k h_k^2$$

Из определения следует, что момент инерции тела (или системы) относительно любой оси является величиной положительной и не равной нулю.

Заметим также, что момент инерции тела — это геометрическая характеристика тела, не зависящая от его движения.

Осевой момент инерции играет при вращательном движении тела такую же роль, какую масса при поступательном, т.е. что *осевой момент инерции является мерой инертности тела при вращательном движении*.

Согласно формуле момент инерции тела равен сумме моментов инерции всех его частей относительно той же оси. Для одной материальной точки, находящейся на расстоянии  $h$  от оси,  $I_Z = mh^2$ .

Часто в ходе расчетов пользуются понятием радиуса инерции. *Радиусом инерции* тела относительно оси  $Oz$  называется линейная величина  $\rho_H$ , определяемая равенством

$$I_Z = M \cdot \rho_u^2,$$

где  $M$  - масса тела. Из определения следует, что радиус инерции геометрически равен расстоянию от оси  $Oz$  той точки, в которой надо сосредоточить массу всего тела, чтобы момент инерции одной этой точки был равен моменту инерции всего тела.

В случае сплошного тела, разбивая его на элементарные части, найдем, что в пределе сумма, стоящая в равенстве  $I_Z = \sum m_k h_k^2$ , обратится в интеграл. В результате, учитывая, что  $dm = \rho dV$ , где  $\rho$  - плотность, а  $V$ -объем, получим

$$I_Z = \int_{(V)} h^2 dm \quad \text{или} \quad I_Z = \int_{(V)} \rho h^2 dV$$

Интеграл здесь распространяется на весь объем  $V$  тела, а плотность  $\rho$  и расстояние  $h$  зависят от координат точек тела.

#### 4. Структурный и кинематический анализ плоских механизмов

##### Основные понятия теории механизмов и машин.

Теория механизмов и машин - научная дисциплина (или раздел науки), которая изучает строение (структуру), кинематику и динамику механизмов в связи с их анализом и синтезом.

Цель ТММ - анализ и синтез типовых механизмов и их систем.

Задачи ТММ: разработка общих методов исследования структуры, геометрии, кинематики и динамики типовых механизмов и их систем.

Типовыми механизмами будем называть простые механизмы, имеющие при различном функциональном назначении широкое применение в машинах, для которых разработаны типовые методы и алгоритмы синтеза и анализа.

Рассмотрим в качестве примера кривошипно-ползунный механизм. Этот механизм широко применяется в различных машинах: двигателях внутреннего сгорания, поршневых компрессорах и насосах, станках, ковочных машинах и прессах. В каждом варианте функционального назначения при проектировании необходимо учитывать специфические требования к механизму. Однако математические зависимости, описывающие структуру, геометрию, кинематику и динамику механизма при всех различных применениях будут практически одинаковыми. Главное или основное отличие ТММ от учебных дисциплин изучающих методы проектирования специальных машин в том, что ТММ основное внимание уделяет изучению методов синтеза и анализа, общих для данного вида механизма, независимых от его конкретного функционального назначения. Специальные дисциплины изучают проектирование только механизмов данного конкретного назначения, уделяя основное внимание специфическим требованиям. При этом широко используются и общие методы синтеза и анализ, которые изучаются в курсе ТММ.

Как самостоятельная научная дисциплина ТММ, подобно другим прикладным разделам науки, возникла в результате промышленной революции начало которой относится к 30-м годам XVIII века. Однако машины существовали за долго до этой даты. Поэтому в истории развития ТММ можно условно выделить четыре периода:

1-й период до начала XIX века - период эмпирического машиностроения в течение которого изобретается большое количество простых машин и механизмов: подъемники, мельницы, камнедробилки, ткацкие и токарные станки, паровые машины (Леонардо да Винчи, Вейст, Ползунов, Уатт). Одновременно закладываются и основы теории: теорема о изменении кинетической энергии и механической работы, "золотое правило механики", законы трения, понятие о передаточном отношении, основы геометрической теории циклоидального и эвольвентного зацепления (Карно, Кулон, Амонтон, Кадано Дж., Ремер, Эйлер).

2-й период от начала до середины XIX века - период начала развития ТММ. В это время разрабатываются такие разделы как кинематическая геометрия механизмов (Савари, Шаль, Оливье), кинетостатика (Кариолис), расчет маховика (Понселе), классификация механизмов по функции преобразования движения (Монж, Лану)

и другие разделы. Пишутся первые научные монографии по механике машин (Виллис, Борины), читаются первые курсы лекций по ТММ и издаются первые учебники (Бетанкур, Чижов, Вейсбах).

3-й период от второй половины XIX века до начала XX века - период фундаментального развития ТММ. За этот период разработаны: основы структурной теории (Чебышев, Грюблер, Сомов, Малышев), основы теории регулирования машин (Вышнеградский), основы теории гидродинамической смазки (Грюблер), основы аналитической теории зацепления (Оливье, Гохман), основы графоаналитической динамики (Виттенбауэр, Мерцалов), структурная классификация и структурный анализ (Ассур), метод планов скоростей и ускорений (Мор, Манке), правило проворачиваемости механизма (Грасгоф) и многие другие разделы ТММ.

4-й период от начала XX века до настоящего времени - период интенсивного развития всех направлений ТММ как в России, так и за рубежом. Среди русских ученых необходимо отметить обобщающие работы Артоболевского И.И., Левитского Н.И., Фролова К.В.; в области структуры механизмов - работы Малышева, Решетова Л.Н., Озола О.Г.; по кинематике механизмов - работы Колчина Н.И., Смирнова Л.П., Зиновьева В.А.; по геометрии зубчатых передач - работы Литвина Ф.Л., Кетова Х.Ф., Гавриленко В.А., Новикова М.Л.; по динамике машин и механизмов - Горячкин В.П., Кожевников С.Н., Коловский М.З. и др. Данное перечисление не охватывает и малой доли работ выдающихся ученых, внесших существенный вклад в развитие ТММ в этот период. Из зарубежных ученых необходимо отметить работы Альта Х., Бегельзака Г., Бейера Р., Крауса Р., Кросли Ф. и многих других.

### **Связь курса ТММ с общеобразовательными, общинженерными и специальными дисциплинами.**

Лекционный курс ТММ базируется на знаниях полученных студентом на младших курсах при изучении физики, высшей и прикладной математики, теоретической механики, инженерной графики и вычислительной техники. Знания, навыки и умение приобретенные студентом при изучении ТММ служат базой для курсов детали машин, подъемно-транспортные машины, системы автоматизированного проектирования, проектирование специальных машин и основы научных исследований.

Инженерное проектирование - это процесс, в котором научная и техническая информация используется для создания новой системы, устройства или машины, приносящих обществу определенную пользу.

Проектирование (по ГОСТ 22487-77) - это процесс составления описания, необходимого для создания еще несуществующего объекта (алгоритма его функционирования или алгоритма процесса), путем преобразования первичного описания, оптимизации заданных характеристик объекта (или алгоритма его функционирования), устранения некорректности первичного описания и последовательного представления (при необходимости) описаний на различных языках.

Проект (от латинского *projectus* - брошенный вперед) - совокупность документов и описаний на различных языках (графическом - чертежи, схемы, диаграммы и графики; математическом - формулы и расчеты; инженерных терминов и понятий - тексты описаний, пояснительные записки), необходимая для создания какого-либо сооружения или изделия.

Звено – твердое тело, входящее в состав механизма, простейший элемент механизма.

Соединение двух соприкасающихся звеньев, обеспечивающее возможное движение одного относительно другого называют кинематической парой.

Классификация кинематических пар.

Кинематические пары (КП) классифицируются по следующим признакам:

1. по виду места контакта (места связи) поверхностей звеньев:
  - низшие, в которых контакт звеньев осуществляется по плоскости или поверхности ( пары скольжения );
  - высшие, в которых контакт звеньев осуществляется по линиям или точкам (пары, допускающие скольжение с перекатыванием).
2. по относительному движению звеньев, образующих пару:
  - вращательные;
  - поступательные;
  - винтовые;
  - плоские;
  - сферические.
3. по способу замыкания (обеспечения контакта звеньев пары):
  - силовое (за счет действия сил веса или силы упругости пружины);
  - геометрическое (за счет конструкции рабочих поверхностей пары).

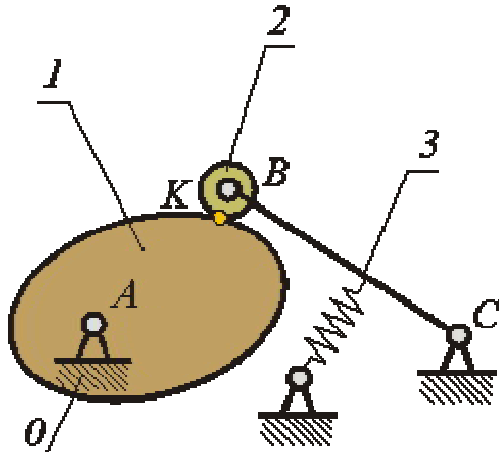


Рис. 4.1

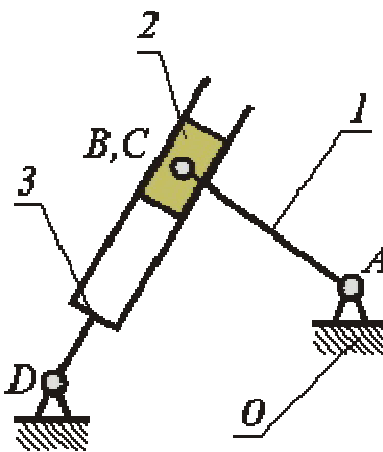


Рис. 4.2

4. по числу условий связи, накладываемых на относительное движение звеньев (число условий связи определяет класс кинематической пары);
  5. по числу подвижностей в относительном движении звеньев.
- движение в КП запрещено (т.е. на данное относительное движение наложена связь).

Несколько звеньев, соединенных кинематическими парами называют кинематической цепью.

Кинематические цепи бывают плоские и пространственные, простые и сложные, открытые и замкнутые.

### **Предмет кинематики. Понятие об абсолютно твердом теле.**

*Кинематикой называется раздел механики, в котором изучается, движение материальных тел в пространстве с геометрической точки зрения, вне связи с силами, определяющими это движение.*

Слово «кинематика» происходит от греческого слова «кинема» что значит движение.

В теоретической механике изучается простейшая форма движения - механическое движение, т. е. происходящее во времени изменение положения одного тела относительно другого, с которым связана, система координат, называемая *системой отсчета*. Систему отсчета можно связать с любым телом. Эта система может быть как движущейся, так и условно неподвижной.

При изучении движений на Земле за условно неподвижную систему отсчета обычно принимают систему осей, неизменно связанных с Землей.

Тело, положение которого по отношению к выбранной системе отсчета не изменяется, находится в состоянии относительного покоя (по отношению к этой системе).

Пространство в механике рассматривается как трехмерное евклидово пространство, и все измерения в нем производятся на основании методов евклидовой геометрии. За единицу длины при измерении расстояний принимается метр.

Время в классической механике предполагается универсальным, т. е. одинаковым во всех системах отсчета и не зависящим от движения одной системы относительно другой. Оно рассматривается как непрерывно изменяющаяся величина. За единицу времени принимается секунда, равная  $\frac{1}{(24 \cdot 3600)}$  средних солнечных суток. Все кинематические величины, характеризующие движение твердого тела и движение отдельной его точки (расстояния, скорости, ускорения и т.д.), рассматриваются как функции времени.

Хотя евклидово пространство и универсальное время отражают реальные свойства пространства и времени лишь приближенно, тем не менее, они позволяют с достаточной для практики точностью изучать движения, скорости которых далеки от скорости света.

Представления древнего мира о движения ограничивались равномерным движением и его скоростью как отношением пути, пройденного телом, ко времени, в течение которого пройден этот путь.

Понятие ускорения введено Галилеем (1564-1642) и обобщено для случая криволинейного движения голландским физиком Гюйгенсом (1629-1695). Гюйгенс первый применил разложение ускорения на касательную и нормальную составляющие.



Развитие кинематики в XVIII в. связано с работами *Леопарда Эйлера* (1707-1783). Эйлер заложил основы кинематики твердого тела, создал аналитические методы решения задач механики.

Быстрое развитие техники в начале XIX в., в частности машиностроения, потребовало специального исследования геометрических свойств движения тел. Кинематика выделилась в самостоятельный раздел, причем особое значение приобрела кинематика механизмов.

Крупные исследования в области кинематики механизмов и машин принадлежат французским ученым *Понселе* (1788-1876), *Шалю* (1793-1880), *Кориолису* (1792-1843) и русским ученым: основоположнику русской школы теории механизмов и машин акад. *П. Л. Чебышеву* (1821-1894), профессорам *Д. В. Ассуру* (1878-1920), *Н. И. Мерцалову* (1866-1948), *Л. П. Котельникову* (1865-1955) и др.

Все кинематические характеристики движения твердого тела или отдельных его точек одинаковы для «материальных» и «геометрических» точек, поэтому ниже употребляется термин «точка» без пояснения, «материальная» она или «геометрическая».

В теоретической механике часто рассматриваются тела, расстояния между любыми точками которых остаются неизменными. Такие тела называются *абсолютно твердыми*.

### **Основные виды механизмов.**

Механизмы классифицируются по следующим признакам:

1. По области применения и функциональному назначению:
  - механизмы летательных аппаратов;
  - механизмы станков;
  - механизмы кузнечных машин и прессов;
  - механизмы двигателей внутреннего сгорания;
  - механизмы промышленных роботов (манипуляторы);
  - механизмы компрессоров;
  - механизмы насосов и т.д.
2. по виду передаточной функции на механизмы:
  - с постоянной передаточной функцией;
  - с переменной передаточной функцией:
    - с нерегулируемой (синусные, тангенсные);
    - с регулируемой:
      - со ступенчатым регулированием (коробки передач);
      - с бесступенчатым регулированием (вариаторы).
3. по виду преобразования движения на механизмы преобразующие :
  - вращательное во вращательное:
    - редукторы  $\omega_{вх} > \omega_{вых}$ ;
    - мультипликаторы  $\omega_{вх} < \omega_{вых}$ ;
    - муфты  $\omega_{вх} = \omega_{вых}$ ;
  - вращательное в поступательное;

- поступательное во вращательное;
  - поступательное в поступательное.
4. по движению и расположению звеньев в пространстве:
- пространственные;
  - плоские;
  - сферические.

Все механизмы являются пространственными механизмами, часть механизмов, звенья которых совершают движение в плоскостях параллельных одной плоскости, являются одновременно и плоскими, другая часть механизмов, звенья которых движутся по сферическим поверхностям эквидистантным какой-либо одной сфере, являются одновременно и сферическими.

5. по изменяемости структуры механизма на механизмы:
- с неизменяемой структурой;
  - с изменяемой структурой.

В процессе работы кривошипно-ползунного механизма насоса его структурная схема все время остается неизменной. В механизмах манипуляторов в процессе работы структурная схема механизма может изменяться. Так если промышленный робот выполняет сборочные операции, например, вставляет цилиндрическую деталь в отверстие, то при транспортировке детали его манипулятор является механизмом с открытой или разомкнутой кинематической цепью. В тот момент когда деталь вставлена в отверстие, кинематическая цепь замыкается, структура механизма изменяется, подвижность уменьшается на число связей во вновь образованной кинематической паре деталь-стойка.

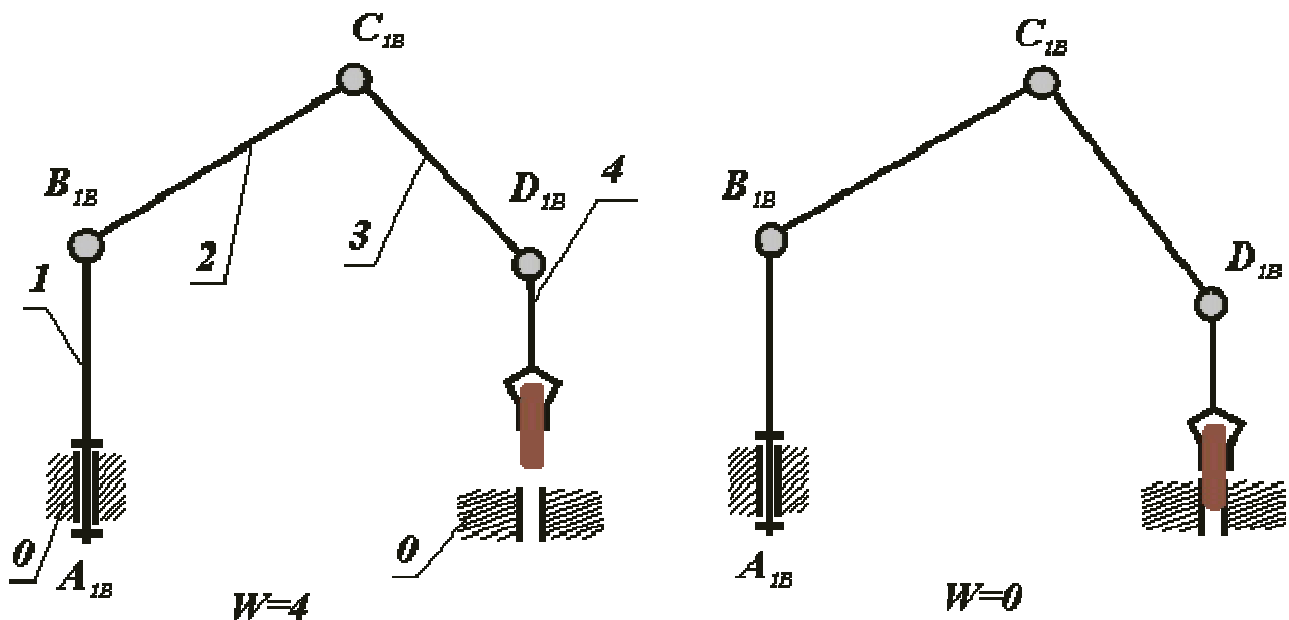


Рис.4.3

Структура манипулятора изменяется и тогда, когда в одной или нескольких кинематических парах включается тормоз. Тогда подвижное соединение двух звеньев заменяется неподвижным, два звена преобразуются в одно. На рис. 3 тормоз включен в паре С.

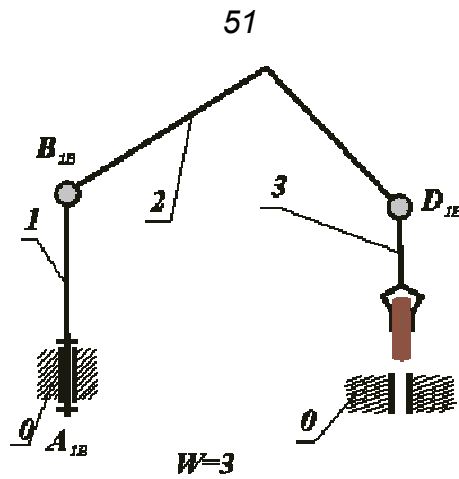


Рис. 4.4

6. по числу подвижностей механизма:

- с одной подвижностью  $W=1$ ;
- с несколькими подвижностями  $W>1$ :
  - суммирующие (интегральные);
  - разделяющие (дифференциальные).
  -

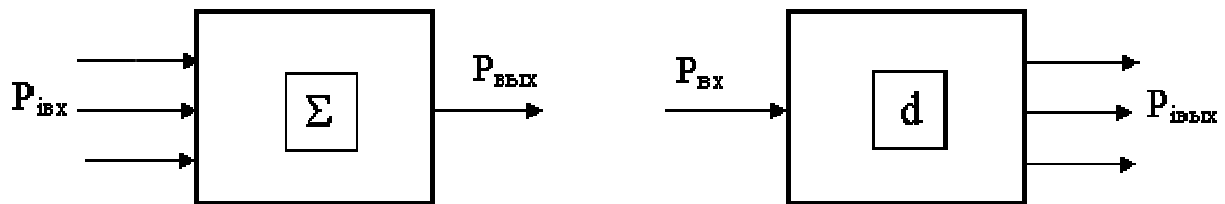


Рис. 4.5

7. по виду кинематических пар (КП):

- с низшими КП ( все КП механизма низшие );
- с высшими КП ( хотя бы одна КП высшая );
- шарнирные (все КП механизма вращательные - шарниры).

8. по способу передачи и преобразования потока энергии:

- фрикционные ( сцепления );
- зацеплением;
- волновые (создание волновой деформации);
- импульсные.

9. по форме, конструктивному исполнению и движению звеньев:

- рычажные;
- зубчатые;
- кулачковые;
- планетарные;
- манипуляторы

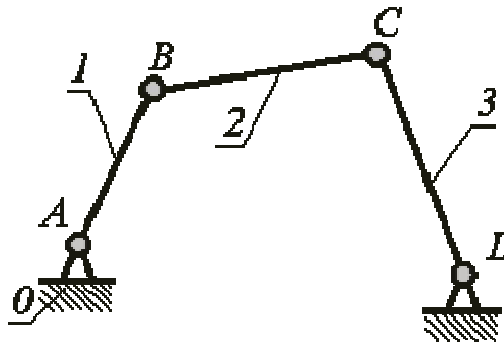


Рис. 4.6

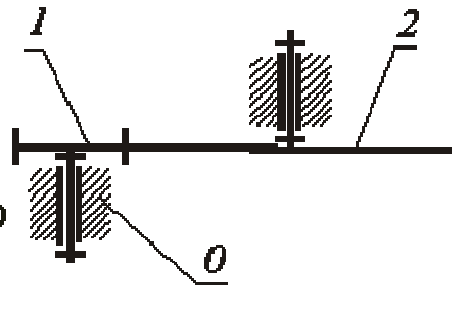


Рис. 4.7

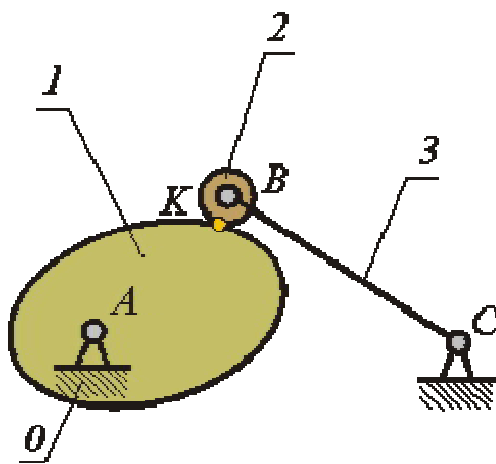


Рис. 4.8

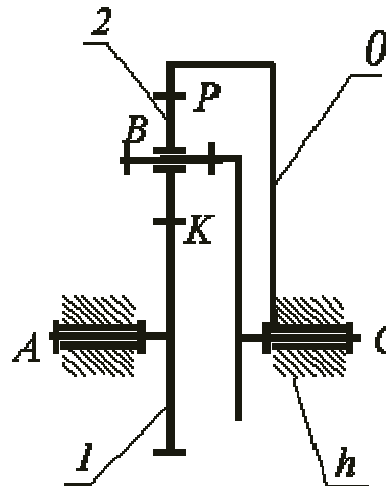


Рис. 4.9

### Структурный анализ и синтез механизмов.

Структура любой технической системы определяется функционально связанной совокупностью элементов и отношений между ними. При этом для механизмов под элементами понимаются звенья, группы звеньев или типовые механизмы, а под отношениями подвижные (КП) или неподвижные соединения. Поэтому под структурой механизма понимается совокупность его элементов и отношений между ними, т.е. совокупность звеньев, групп или типовых механизмов и подвижных или неподвижных соединений. Геометрическая структура механизма полностью описывается заданием геометрической формы его элементов, их расположения, указания вида связей между ними. Структура механизма может быть на разных стадиях проектирования описываться различными средствами, с разным уровнем абстрагирования: на функциональном уровне - функциональная схема, на уровне звеньев и структурных групп - структурная схема и т.п. Структурная схема - графическое изображение механизма, выполненное с использованием условных обозначений рекомендованных ГОСТ (см. например ГОСТ 2.703-68) или принятых в специальной литературе, содержащее информацию о числе и расположении элементов (звеньев, групп), а также о виде и классе кинематических пар, соединяющих эти элементы. В отличие от кинематической схемы механизма, структурная схема не содержит информации о размерах звеньев и вычерчивается без соблюдения масштабов. (*Примечание:* кинематическая схема - графическая модель механизма, предназначенная для исследования его кинематики.)

## Понятие о структурном синтезе и анализе.

Как на любом этапе проектирования при структурном синтезе различают задачи синтеза и задачи анализа.

Задачей структурного анализа является задача определения параметров структуры заданного механизма - числа звеньев и структурных групп, числа и вида КП, числа подвижностей (основных и местных), числа контуров и числа избыточных связей.

Задачей структурного синтеза является задача синтеза структуры нового механизма, обладающего заданными свойствами: числом подвижностей, отсутствием местных подвижностей и избыточных связей, минимумом числа звеньев, с парами определенного вида (например, только вращательными, как наиболее технологичными) и т.п.

Основные понятия структурного синтеза и анализа.

Подвижность механизма - число независимых обобщенных координат однозначно определяющее положение звеньев механизма на плоскости или в пространстве.

Связь - ограничение, наложенное на перемещение тела по данной координате.

Избыточные (пассивные) - такие связи в механизме, которые повторяют или дублируют связи, уже имеющиеся по данной координате, и поэтому не изменяющие реальной подвижности механизма. При этом расчетная подвижность механизма уменьшается, а степень его статической неопределимости увеличивается. Иногда используется иное определение: Избыточные связи - это связи число которых в механизме определяется разностью между суммарным числом связей, наложенных кинематическими парами, и суммой степеней подвижности всех звеньев, местных подвижностей и заданной (требуемой) подвижностью механизма в целом.

Местные подвижности - подвижности механизма, которые не оказывают влияния на его функцию положения (и передаточные функции), а введены в механизм с другими целями (например, подвижность ролика в кулачковом механизме обеспечивает замену в высшей паре трения скольжения трением качения).

## Основные структурные формулы.

Основные структурные формулы были составлены для плоских механизмов Чебышевым П.Л. и Грюблером М., для пространственных - Сомовым П.О. и Малышевым. Так как принципы заложенные в построение всех этих формул одинаковы, то их можно записать в обобщенном виде:

$$W = H - n + \sum_{i=1}^{H-1} (H-i) \cdot p_i, \quad (4.1)$$

где:  $H$  - число степеней подвижности твердого тела (соответственно при

рассмотрении механизма в пространстве  $H=6$ , на плоскости  $H=3$ );

$n$  - число подвижных звеньев в механизме;  $n = k - 1$ ;

$k$  - общее число звеньев механизма (включая и неподвижное звено - стойку);

$i$  - число подвижностей в КП;

$p_i$  - число кинематических пар с  $i$  подвижностями.

Структурной группой Ассура (или группой нулевой подвижности) называется кинематическая цепь, образованная только подвижными звеньями механизма, подвижность которой (на плоскости и в пространстве) равна нулю ( $W_{zp} = 0$ ).

Конечные звенья групп Ассура, входящие в две кинематические пары, из которых одна имеет свободный элемент звена, называются поводками. Группы могут быть различной степени сложности. Структурные группы Ассура делятся на классы в зависимости от числа звеньев, образующих группу, числа поводков в группе, числа замкнутых контуров внутри группы. В пределах класса (по Ассуру) группы подразделяются по числу поводков на порядки (порядок группы равен числу ее поводков). Механизмы классифицируются по степени сложности групп входящих в их состав. Класс и порядок механизма определяется классом и порядком наиболее сложной из входящих в него групп. Особенность структурных групп Ассура - их статическая определимость. Если группу Ассура свободными элементами звеньев присоединить к стойке, то образуется статически определяемая ферма. Используя группы Ассура удобно проводить структурный, кинематический и силовой анализ механизмов.

### **Кинематический анализ и синтез механизмов.**

**Строят схему механизма по заданным размерам методом засечек в положении, определяемом углом  $\varphi_1$  начального звена, в масштабе.**

Масштаб длин будет  $\mu_l = AB/l_{AB}$  (в миллиметрах на метр); масштаб плана скоростей  $\mu_v$  (в миллиметрах на метр-секунду в минус первой степени, мм/мс<sup>-1</sup>), масштаб плана ускорений  $\mu_a$  (в миллиметрах на метр-секунду в минус второй степени, мм/мс<sup>-2</sup>).

**Длина отрезка (в миллиметрах), изображающая на схеме начальное звено, берется произвольно. Но целесообразно брать ее кратной реальной длине звена. Размеры остальных звеньев находятся с учетом выбранного масштаба длин. Последовательность построения схемы механизма дана в разделе I.**

1. Определяют число степеней свободы механизма по формуле П.Л.Чебышева для плоских механизмов (без избыточных связей):

$$W = 3(k - 1) - 2p_H - 1p_B = 3n - 2p_1 - 1p_2; \quad (4.2)$$

здесь  $k$  - число всех звеньев, включая стойку;  $n$  - число подвижных звеньев;  $p_H = p_1$  - число низших одноподвижных (вращательных и поступательных) кинематических пар;  $p_B = p_2$  - число высших двухподвижных кинематических пар (в рычажных механизмах их нет). Полученное число степеней свободы механизма соответствует числу начальных звеньев с заданными

кинематическими параметрами, так как только в этом случае остальные звенья будут двигаться вполне определенным образом относительно стойки.

При изучении характера движения звеньев и вида кинематических пар особое внимание следует обратить на сложное движение: сочетание относительного поступательного с переносным вращательным.

2. Проводят структурный анализ механизма по Л.В.Ассуру, согласно теории которого любой плоский механизм с  $W=1$  состоит из первичного механизма (одноподвижное начальное звено и стойка, образующие вращательную или поступательную кинематическую пару) с заданным законом движения начального звена ( $W=1$ ) и одной или нескольких структурных групп (незамкнутая кинематическая цепь, которая при замыкании со стойкой обращается в неподвижное соединение и у которой  $W=0$ ). В заданиях встречаются, как правило, двухповодковые группы, состоящие из двух звеньев и трех кинематических пар.

Структурный анализ начинают с установления первичного механизма, закон движения которого задан. Затем выделяют ту структурную группу, которая была присоединена к механизму последней, и далее – оставшуюся структурную группу, примыкающую к первичному механизму (для механизмов, имеющих по две структурные группы). Расчленение механизма на структурные группы производят так, чтобы после удаления группы из механизма не нарушался закон движения оставшихся звеньев механизма и число его степеней свободы. Для каждой структурной группы по формуле А.П.Малышева находят число избыточных связей, устраняют их увеличением подвижностей кинематических пар, и составляют схему самоустанавливающегося механизма.

3. Строят планы линейных скоростей и ускорений точек звеньев и определяют угловые скорости  $\omega$  и ускорения  $\varepsilon$  звеньев.

Построение планов скоростей начинают со звена, закон движения которого задан. Определяют скорость точки этого звена, составляют векторное уравнение, связывающее эту скорость со скоростями точек смежного звена, и устанавливают, какие векторы известны по величине, какие и по величине, и по направлению или какие только по направлению. Рекомендуются векторы, известные по величине и по направлению, подчеркивать двумя чертами, а известные только по величине или только по направлению – одной чертой. Здесь же отмечают буквами направление векторов. Если в векторном уравнении только два неизвестных, то оно решается, и его графическим решением будет план скоростей. Стрелки векторов на плане проставляют в строгом соответствии с записанным уравнением, соблюдая правило векторного суммирования; при этом относительные скорости проходят вне полюса, а начала векторов абсолютных скоростей всегда находятся в полюсе. Из построенного плана находят отрезки, пропорциональные скоростям точек, и, зная масштаб  $\mu_v$ , определяют скорости, а направление скоростей – из плана.

Если известны абсолютные скорости двух точек одного и того же звена, то скорость третьей точки, лежащей с ними на одной прямой, находят пропорциональным делением (например, точка  $S_2$ ). Для этого на плане скоростей

отрезок относительной скорости делят искомой точкой в том же соотношении, в котором соответствующая точка делит реальное звено на схеме механизма. Длину искомого отрезка определяют из пропорции (отношение длин на звене механизма равно отношению отрезков на плане скоростей). Соединяя полученную точку с полюсом, находят отрезок искомой абсолютной скорости.

Абсолютную скорость третьей точки звена, не лежащей на одной прямой с двумя другими его точками, скорости которых известны, определяют методом подобия. Для этого на плане скоростей на отрезке известной относительной скорости строят треугольник, подобный тому, который имеется на схеме механизма, соблюдая одинаковое направление прочтения букв по вершинам треугольника на плане скоростей и на механизме. При этом стороны подобных треугольников взаимно перпендикулярны. В итоге построения получается треугольник, составленный вершинами относительных скоростей. Соединяя построенную вершину треугольника с полюсом, находят отрезок искомой абсолютной скорости.

Если два звена образуют поступательную кинематическую пару, то для определения абсолютной скорости точки одного из этих звеньев, геометрически совпадающей в данный момент с точкой другого звена (скорость которой известна), используют векторное уравнение сложного движения. Абсолютная скорость искомой точки складывается из переносной и относительной составляющих; вектор переносной скорости обычно известен.

Зная линейные скорости точек, определяют угловые скорости звеньев по величине и по направлению.

План ускорений строят на основе векторных уравнений в той же последовательности, что и план скоростей. Каждый из векторов представляют нормальной  $a^n$  и касательной  $a^t$  составляющими. При этом нормальное ускорение всегда известно по величине (так как план скоростей построен) и направлению (к центру вращения), а касательное перпендикулярно ему и неизвестно по величине.

На плане ускорений начало вектора абсолютного ускорения всегда находится в полюсе, а вектор относительного ускорения проходит вне полюса.

Метод пропорционального деления и метод подобия применяют только для полных относительных ускорений. При этом подобную фигуру следует строить на плане по трем сторонам, величина одной из которых известна, а две другие определяют из соответствующих пропорций, соблюдая одинаковое направление обхода при чтении букв по вершинам фигуры, составленной из полных относительных ускорений плана, и фигуры на звене механизма.

Полное ускорение точки, совершающей сложное движение, состоит из переносного, относительного и кориолисового ускорений. Последнее обусловлено тем, что звенья, имеющие линейную относительную скорость  $v_{OTH}$ , совершают вращательное движение с угловой скоростью  $\omega_{ПЕР}$  вокруг мгновенного центра вращения. Для плоского механизма  $a^K = 2\omega_{ПЕР}v_{OTH}$ , так как в этом случае  $\sin\left(\frac{\omega_{ПЕР}}{\omega_{ПЕР}} \frac{v_{OTH}}{v_{OTH}}\right) = 1$ . Направление находят по правилу Жуковского поворотом



вектора  $\vec{v}_{отн}$  на  $90^\circ$  в направлении угловой скорости  $\omega_{пер}$ . Определив из плана касательные ускорения, подсчитывают величины угловых ускорений  $\varepsilon$  звеньев и определяют их направления.

## 5. Приводы механизмов

### Электропривод механизмов.

Электрический привод (сокращённо *электропривод*) – это электромеханическая система для приведения в движение исполнительных механизмов рабочих машин и управления этим движением в целях осуществления технологического процесса.

Современный электропривод — это совокупность множества электромашин, аппаратов и систем управления ими. Он является основным потребителем электрической энергии (до 60 %) и главным источником механической энергии в промышленности.

Определение по ГОСТу Р 50369-92 электропривод - электромеханическая система, состоящая из преобразователей электроэнергии, электромеханических и механических преобразователей, управляющих и информационных устройств и устройств сопряжения с внешними электрическими, механическими, управляющими и информационными системами, предназначенная для приведения в движение исполнительных органов рабочей машины и управления этим движением в целях осуществления технологического процесса.

Как видно из определения, исполнительный орган в состав привода не входит. Однако, авторы авторитетных учебников включают исполнительный орган в состав электропривода. Это противоречие объясняется тем, что при проектировании электропривода необходимо учитывать величину и характер изменения механической нагрузки на валу электродвигателя, которые определяются параметрами исполнительного органа. При невозможности реализации прямого привода электродвигатель приводит исполнительный органа в движение через кинематическую передачу. КПД, передаточное число и пульсации, вносимые кинематической передачей также учитываются при проектировании электропривода..

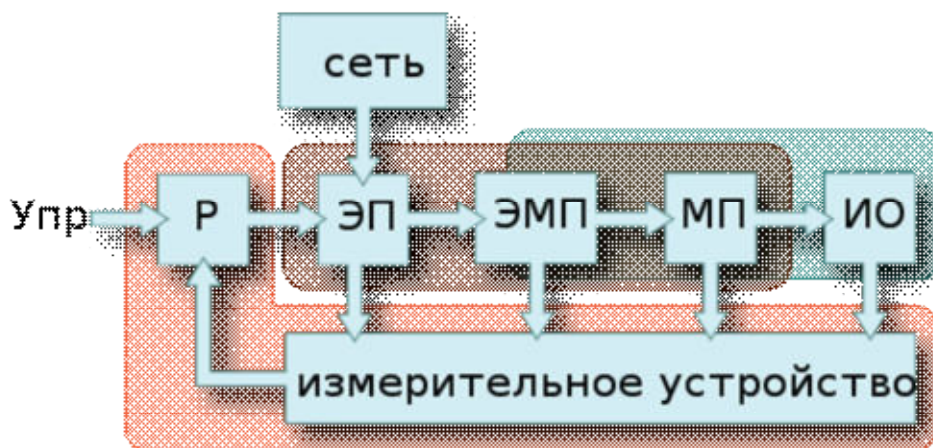


Рис. 5.1

Функциональные элементы:

- Регуляторы (Р) предназначен для управления процессами, протекающими в электроприводе.
- Электрический преобразователь (ЭП) предназначен для преобразования электрической энергии сети в регулируемое напряжение постоянного или переменного тока.
- Электромеханический преобразователь (ЭМП) — двигатель, предназначен для преобразования электрической энергии в механическую.
- Механический преобразователь (МП) может изменять скорость вращения двигателя, а также характер движения (с поступательного на вращательное или с вращательного на поступательное).
- Упр — управляющие воздействие.
- ИО — исполнительный орган.

Функциональные части:

- Силовая часть или электропривод с разомкнутой системой регулирования;
- Механическая часть;

### **Виды электроприводов.**

- Нерегулируемые, простейшие, предназначенные для пуска и остановки двигателя, работающие в односкоростном режиме.
- Регулируемые, допускающие изменение частоты вращения и управление пуском и торможением электродвигателя для заданного технологического процесса. Способ регулирования зависит от типа двигателя. Так, для машин переменного тока применимо управление частотой, током в роторе, переключением пар полюсов статора. Для коллекторных машин применимо регулирование напряжением.
- Неавтоматизированные
- Автоматизированные
- Линейные — для частных случаев.
- Вращательные — наиболее распространённый тип. Чаще всего линейное перемещение получают механическими преобразователями вращательного движения двигателя.

### **Подбор электродвигателя.**

Качество работы современного электропривода во многом определяется правильным выбором используемого электрического двигателя, что в свою очередь обеспечивает продолжительную надёжную работу электропривода и высокую эффективность технологических и производственных процессов в промышленности, на транспорте, в строительстве и других областях.

При выборе электрического двигателя для привода производственного механизма руководствуются следующими рекомендациями:

- Исходя из технологических требований, производят выбор электрического двигателя по его техническим характеристикам (по роду тока, номинальному напряжению и мощности, частоте вращения, виду механической характеристики,

продолжительности включения, перегрузочной способности, пусковым, регулировочным и тормозным свойствами др.), а также конструктивное исполнение двигателя по способу монтажа и крепления.

- Исходя из экономических соображений, выбирают наиболее простой, экономичный и надёжный в эксплуатации двигатель, не требующий высоких эксплуатационных расходов и имеющий наименьшие габариты, массу и стоимость.
- Исходя из условий окружающей среды, в которых будет работать двигатель, а также из требований безопасности работы во взрывоопасной среде, выбирают конструктивное исполнение двигателя по способу защиты.

Правильный выбор типа, исполнения и мощности электрического двигателя определяет не только безопасность, надёжность и экономичность работы и длительность срока службы двигателя, но и технико-экономические показатели всего электропривода в целом.

Следует иметь в виду, что не может быть универсального электропривода. В качестве примера, приведём средний медеплавильный цех: цех имеет несколько анодных печей, печи работают в разных режимах: загрузка, плавление, восстановление, окисление и это неполный перечень. Требуемые характеристики механизмов для этих режимов различны, на каждом процессе бывает задействована различная группа приводной арматуры. Диаметры разнятся от 200 до 900 мм, различны и подающиеся среды — мазут, газ, воздух и проч., температурные режимы так же изменяются.

С другой стороны, конструкция электропривода может быть модульной, части привода могут свободно меняться, причём блоки разных исполнений должны быть по возможности унифицированы и легко заменяться.

Для некоторых механизмов, работающих в повторно-кратковременном режиме (краны, лифты), большую часть рабочего цикла двигатель работает на естественной характеристике и только относительно небольшое время работает на регулировочной характеристике, обычно на пониженной частоте вращения. В этом случае потери электроэнергии на регулировочной характеристике сравнительно невелики, так как мало время работы на ней. Поэтому здесь можно применять простые и дешёвые способы регулирования, даже если они вызывают повышенные потери мощности в обмотках. Поэтому, благодаря простоте реализации метода регулирования скорости путем изменения сопротивления в цепи ротора, такие электроприводы нашли наиболее широкое применение в крановых системах, и сейчас оставляют основную часть находящихся в эксплуатации и выпускаемых промышленностью электроприводов. Комплектные электроприводы включают в себя системы с силовыми кулачковыми контроллерами и магнитными контроллерами с цепями управления на переменном и постоянном токе. Такое построение рядов электроприводов позволяет в каждом конкретном случае осуществить выбор наиболее приемлемой системы с учетом условий эксплуатации, предъявляемых требований по автоматизации управления, масс, габаритов и стоимости

Основными типами электродвигателей, которые используются для привода производственных механизмов с регулируемой скоростью движения рабочего

органа, являются двигатели постоянного тока и асинхронные с короткозамкнутым или фазным ротором. Наиболее просто требуемые искусственные характеристики получаются у двигателей постоянного тока, поэтому до недавнего времени они преимущественно и находили применение для регулируемых электроприводов. С другой стороны, асинхронные двигатели, уступая двигателям постоянного тока по возможностям регулирования частоты вращения, по сравнению с последними проще в изготовлении и эксплуатации и имеют относительно меньшие массу, размеры и стоимость. Именно эти отличительные свойства асинхронных двигателей определили их главенствующее использование в промышленном нерегулируемом электроприводе. В настоящее время двигатели постоянного тока вытесняются асинхронными двигателями с преобразователями частоты, а также синхронными двигателями с постоянными магнитами на роторе и шаговыми. Число выпускаемых двигателей постоянного тока составляет лишь 4-5 % числа двигателей переменного тока и неуклонно снижается.

### **Гидропривод механизмов.**

Гидравлический привод (гидропривод) – совокупность устройств, предназначенных для приведения в движение машин и механизмов посредством гидравлической энергии.

Гидропривод представляет собой своего рода «гидравлическую вставку» между приводным двигателем и нагрузкой (машиной или механизмом) и выполняет те же функции, что и механическая передача (редуктор, ремённая передача, кривошипно-шатунный механизм и т. д.).

### **Функции гидропривода.**

Основная функция гидропривода, как и механической передачи, – преобразование механической характеристики приводного двигателя в соответствии с требованиями нагрузки (преобразование вида движения выходного звена двигателя, его параметров, а также регулирование, защита от перегрузок и др.). Другая функция гидропривода – это передача мощности от приводного двигателя к рабочим органам машины (например, в одноковшовом экскаваторе – передача мощности от двигателя внутреннего сгорания к ковшу или к гидродвигателям привода стрелы, к гидродвигателям поворота башни и т.д.).

В общих чертах, передача мощности в гидроприводе происходит следующим образом:

1. Приводной двигатель передаёт вращающий момент на вал насоса, который сообщает энергию рабочей жидкости.
2. Рабочая жидкость по гидролиниям через регулирующую аппаратуру поступает в гидродвигатель, где гидравлическая энергия преобразуется в механическую.
3. После этого рабочая жидкость по гидролиниям возвращается либо в бак, либо непосредственно к насосу.

## **Виды гидроприводов.**

Гидроприводы могут быть двух типов: гидродинамические и объёмные:

- В гидродинамических приводах используется в основном кинетическая энергия потока жидкости.
- В объёмных гидроприводах используется потенциальная энергия давления рабочей жидкости.

Объёмный гидропривод — это гидропривод, в котором используются объёмные гидромашины (насосы и гидродвигатели). Объёмной называется гидромашина, рабочий процесс которой основан на попеременном заполнении рабочей камеры жидкостью и вытеснении её из рабочей камеры. К объёмным машинам относят, например, поршневые насосы, аксиально-поршневые, радиально-поршневые, шестерённые гидромашины и др.

Одна из особенностей, отличающая объёмный гидропривод от гидродинамического, — большие давления в гидросистемах. Так, номинальные давления в гидросистемах экскаваторов могут достигать 32 МПа, а в некоторых случаях рабочее давление может быть более 300 МПа, в то время как гидродинамические машины работают обычно при давлениях, не превышающих 1,5—2 МПа.

Объёмный гидропривод намного более компактен и меньше по массе, чем гидродинамический, и поэтому он получил наибольшее распространение.

В зависимости от конструкции и типа входящих в состав гидропередачи элементов объёмные гидроприводы можно классифицировать по нескольким признакам.

По характеру движения выходного звена гидродвигателя различают:

- гидропривод вращательного движения, когда в качестве гидродвигателя применяется гидромотор, у которого ведомое звено (вал или корпус) совершает неограниченное вращательное движение;
- гидропривод поступательного движения, у которого в качестве гидродвигателя применяется гидроцилиндр — двигатель с возвратно-поступательным движением ведомого звена (штока поршня, плунжера или корпуса);
- гидропривод поворотного движения, когда в качестве гидродвигателя применён поворотный гидродвигатель, у которого ведомое звено (вал или корпус) совершает возвратно-поворотное движение на угол, меньший 360°.

Если скорость выходного звена (гидроцилиндра, гидромотора) регулируется изменением частоты вращения двигателя, приводящего в работу насос, то гидропривод считается нерегулируемым.

Регулируемый гидропривод в котором в процессе его эксплуатации скорость выходного звена гидродвигателя можно изменять по требуемому закону. В свою очередь регулирование может быть:

- дроссельным
- объёмным
- объёмно-дроссельным.

Регулирование может быть: ручным или автоматическим.

Гидропривод с замкнутой схемой циркуляции, в котором рабочая жидкость от гидродвигателя возвращается во всасывающую гидролинию насоса.

Гидропривод с замкнутой циркуляцией рабочей жидкости компактен, имеет небольшую массу и допускает большую частоту вращения ротора насоса без опасности возникновения кавитации, поскольку в такой системе во всасывающей линии давление всегда превышает атмосферное. К недостаткам следует отнести плохие условия для охлаждения рабочей жидкости, а также необходимость спускать из гидросистемы рабочую жидкость при замене или ремонте гидроаппаратуры;

Гидросистемы с замкнутой схемой циркуляции рабочей жидкости (справа) и с разомкнутой схемой (слева). На схеме слева всасывающая и сливная гидролинии сообщаются с баком (разомкнутая схема); на схеме справа бак используется только для вспомогательной гидросистемы (системы подпитки). Н и Н1 — насосы; М — гидромотор; Р — гидрораспределитель; Б — гидробак; Н1 — насос системы подпитки; КП1, КП2, — Предохранительные клапана; КО1 и КО2 — обратные клапана. Предохранительные клапана КП (на схеме слева), КП1 и КП2 (на схеме справа) срабатывают в тот момент, когда нагрузка на валу гидромотора слишком велика, и давление в гидросистеме превышает допустимую величину. Обратные клапана КО1 и КО2 срабатывают тогда, когда давление слишком мало, и возникает опасность кавитации

Гидропривод с разомкнутой системой циркуляции, в котором рабочая жидкость постоянно сообщается с гидробаком или атмосферой.

Достоинства такой схемы — хорошие условия для охлаждения и очистки рабочей жидкости. Однако такие гидроприводы громоздки и имеют большую массу, а частота вращения ротора насоса ограничивается допускаемыми (из условий бескавитационной работы насоса) скоростями движения рабочей жидкости во всасывающем трубопроводе.

По источнику подачи рабочей жидкости различают насосный гидропривод, магистральный гидропривод, аккумуляторный гидропривод.

В насосном гидроприводе, получившем наибольшее распространение в технике, механическая энергия преобразуется насосом в гидравлическую, носитель энергии — рабочая жидкость, нагнетается через напорную магистраль к гидродвигателю, где энергия потока жидкости преобразуется в механическую. Рабочая жидкость, отдав свою энергию гидродвигателю, возвращается либо обратно к насосу (замкнутая схема гидропривода), либо в бак (разомкнутая или открытая схема гидропривода). В общем случае в состав насосного гидропривода входят гидропередача, гидроаппараты, кондиционеры рабочей жидкости, гидроёмкости и гидролинии.

Наибольшее применение в гидроприводе получили аксиально-поршневые, радиально-поршневые, пластинчатые и шестерённые насосы.

В магистральном гидроприводе рабочая жидкость нагнетается насосными станциями в напорную магистраль, к которой подключаются потребители гидравлической энергии. В отличие от насосного гидропривода, в котором, как правило, имеется один (реже 2-3) генератора гидравлической энергии (насоса), в

магистральном гидроприводе таких генераторов может быть большое количество, и потребителей гидравлической энергии также может быть достаточно много.

В аккумуляторном гидроприводе жидкость подаётся в гидролинию от заранее заряженного гидроаккумулятора. Этот тип гидропривода используется в основном в машинах и механизмах с кратковременными режимами работы.

По типу приводящего двигателя гидроприводы бывают с электроприводом, приводом от ДВС, турбин и т.д.

### Структура гидропривода.

Обязательными элементами гидропривода являются насос и гидродвигатель. Насос является источником гидравлической энергии, а гидродвигатель — её потребителем, то есть преобразует гидравлическую энергию в механическую. Управление движением выходных звеньев гидродвигателей осуществляется либо с помощью регулирующей аппаратуры — дросселей, гидрораспределителей и др., либо путём изменения параметров самого гидродвигателя и/или насоса.

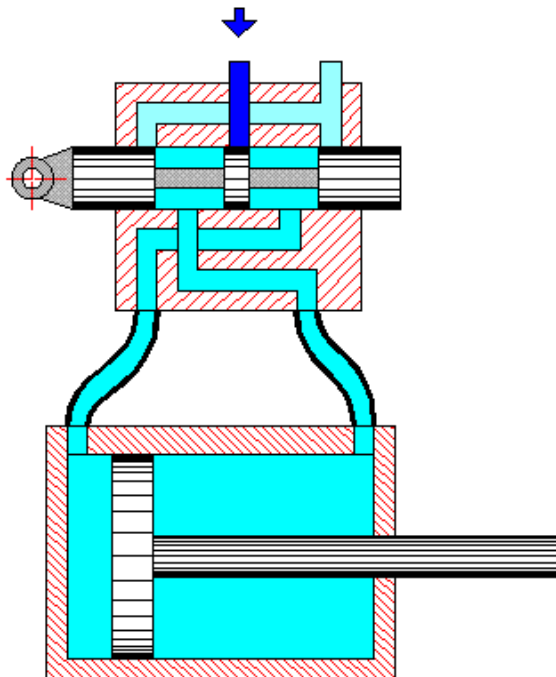


Рис. 5.1

Принцип действия золотникового гидрораспределителя, управляющего движением штока гидроцилиндра

Также обязательными составными частями гидропривода являются гидролинии, по которым жидкость перемещается в гидросистеме. Критически важной для гидропривода (в первую очередь объёмного) является очистка рабочей жидкости от содержащихся в ней (и постоянно образующихся в процессе работы) абразивных частиц. Поэтому системы гидропривода обязательно содержат фильтрующие устройства (например, масляные фильтры), хотя принципиально гидропривод некоторое время может работать и без них.



Поскольку рабочие параметры гидропривода существенно зависят от температуры рабочей жидкости, то в гидросистемах в некоторых случаях, но не всегда, устанавливают системы регулирования температуры (подогревающие и/или охлаждающие устройства).

### **Область применения.**

Объёмный гидропривод применяется в горных и строительно-дорожных машинах. В настоящее время более 50% общего парка мобильных строительно-дорожных машин (бульдозеров, экскаваторов, автогрейдеров и др.) является гидрофицированной. Это существенно отличается от ситуации 30-х - 40-х годов 20-го века, когда в этой области применялись в основном механические передачи.

В станкостроении гидропривод также широко применяется, однако в этой области он испытывает высокую конкуренцию со стороны других видов привода.

Широкое распространение получил гидропривод в авиации. Насыщенность современных самолётов системами гидропривода такова, что общая длина трубопроводов современного пассажирского авиалайнера может достигать нескольких километров.

В автомобильной промышленности самое широкое применение нашли гидроусилители руля, существенно повышающие удобство управления автомобилем. Эти устройства являются разновидностью следящих гидроприводов. Гидроусилители применяют и во многих других областях техники (авиации, тракторостроении, промышленном оборудовании и др.).

В некоторых танках, например, в японском танке Тип 10 применяется гидростатическая трансмиссия, представляющая собой по сути систему объёмного гидропривода движителей. Такого же типа трансмиссия устанавливается и в некоторых современных бульдозерах.

В целом, границы области применения гидропривода определяются его преимуществами и недостатками.

### **Преимущества гидропривода.**

К основным преимуществам гидропривода относятся:

- возможность универсального преобразования механической характеристики приводного двигателя в соответствии с требованиями нагрузки;
- простота управления и автоматизации;
- простота предохранения приводного двигателя и исполнительных органов машин от перегрузок; например, если усилие на штоке гидроцилиндра становится слишком большим (такое возможно, в частности, когда шток, соединённый с рабочим органом, встречает препятствие на своём пути), то давление в гидросистеме достигает больших значений — тогда срабатывает предохранительный клапан в гидросистеме, и после этого жидкость идёт на слив в бак, и давление уменьшается;
- надёжность эксплуатации;
- широкий диапазон бесступенчатого регулирования скорости выходного звена; например, диапазон регулирования частоты вращения гидромотора может составлять от 2500 об/мин до 30-40 об/мин, а в некоторых случаях, у

гидромоторов специального исполнения, доходит до 1-4 об/мин, что для электромоторов трудно реализуемо;

- большая передаваемая мощность на единицу массы привода; в частности, масса гидравлических машин примерно в 10-15 раз меньше массы электрических машин такой же мощности;
- самосмазываемость трущихся поверхностей при применении минеральных и синтетических масел в качестве рабочих жидкостей; нужно отметить, что при техническом обслуживании, например, мобильных строительно-дорожных машин на смазку уходит до 50% всего времени обслуживания машины, поэтому самосмазываемость гидропривода является серьёзным преимуществом;
- возможность получения больших сил и мощностей при малых размерах и весе передаточного механизма;
- простота осуществления различных видов движения — поступательного, вращательного, поворотного;
- возможность частых и быстрых переключений при возвратно-поступательных и вращательных прямых и реверсивных движениях;
- возможность равномерного распределения усилий при одновременной передаче на несколько приводов;
- упрощённость компоновки основных узлов гидропривода внутри машин и агрегатов, в сравнении с другими видами приводов.

### **Недостатки гидропривода.**

К недостаткам гидропривода относятся:

- утечки рабочей жидкости через уплотнения и зазоры, особенно при высоких значениях давления в гидросистеме, что требует высокой точности изготовления деталей гидрооборудования;
- нагрев рабочей жидкости при работе, что приводит к уменьшению вязкости рабочей жидкости и увеличению утечек, поэтому в ряде случаев необходимо применение специальных охлаждающих устройств и средств тепловой защиты;
- более низкий КПД чем у сопоставимых механических передач;
- необходимость обеспечения в процессе эксплуатации чистоты рабочей жидкости, поскольку наличие большого количества абразивных частиц в рабочей жидкости приводит к быстрому износу деталей гидрооборудования, увеличению зазоров и утечек через них, и, как следствие, к снижению объёмного КПД;
- необходимость защиты гидросистемы от проникновения в неё воздуха, наличие которого приводит к нестабильной работе гидропривода, большим гидравлическим потерям и нагреву рабочей жидкости;
- пожароопасность в случае применения горючих рабочих жидкостей, что налагает ограничения, например, на применение гидропривода в горячих цехах;
- зависимость вязкости рабочей жидкости, а значит и рабочих параметров гидропривода, от температуры окружающей среды;
- в сравнении с пневмоприводом — невозможность эффективной передачи гидравлической энергии на большие расстояния вследствие больших потерь напора в гидролиниях на единицу длины.

### **Пневмопривод механизмов.**

Пневматический привод (пневмопривод) — совокупность устройств, предназначенных для приведения в движение машин и механизмов посредством пневматической энергии. Обязательными элементами пневмопривода являются компрессор (генератор пневматической энергии) и пневмодвигатель.

Пневмопривод, подобно гидроприводу, представляет собой своего рода «пневматическую вставку» между приводным двигателем и нагрузкой (машиной или механизмом) и выполняет те же функции, что и механическая передача (редуктор, ремённая передача, кривошипно-шатунный механизм и т. д.).

Основное назначение пневмопривода, как и механической передачи, — преобразование механической характеристики приводного двигателя в соответствии с требованиями нагрузки (преобразование вида движения выходного звена двигателя, его параметров, а также регулирование, защита от перегрузок и др.).

В общих чертах, передача энергии в пневмоприводе происходит следующим образом:

1. Приводной двигатель передаёт вращающий момент на вал компрессора, который сообщает энергию рабочему газу.
2. Рабочий газ после специальной подготовки по пневмолиниям через регулирующую аппаратуру поступает в пневмодвигатель, где пневматическая энергия преобразуется в механическую.
3. После этого рабочий газ выбрасывается в окружающую среду, в отличие от гидропривода, в котором рабочая жидкость по гидролиниям возвращается либо в гидробак, либо непосредственно к насосу.

В зависимости от характера движения выходного звена пневмодвигателя (вала пневмомотора или штока пневмоцилиндра), и соответственно, характера движения рабочего органа пневмопривод может быть вращательным или поступательным. Пневмоприводы с поступательным движением получили наибольшее распространение в технике.

### **Пневмоприводы с поступательным движением.**

По характеру воздействия на рабочий орган пневмоприводы с поступательным движением бывают:

- двухпозиционные, перемещающие рабочий орган между двумя крайними положениями;
  - многопозиционные, перемещающие рабочий орган в различные положения.
- По принципу действия пневматические приводы с поступательным движением бывают:
- одностороннего действия, возврат привода в исходное положение осуществляется механической пружиной;
  - двухстороннего действия, перемещающие рабочий орган привода осуществляется сжатым воздухом.

По конструктивному исполнению пневмоприводы с поступательным движением делятся на:

- поршневые, представляющие собой цилиндр, в котором под воздействием сжатого воздуха либо пружины перемещается поршень (возможны два варианта исполнения: в односторонних поршневых пневмоприводах рабочий ход осуществляется за счёт сжатого воздуха, а холостой за счёт пружины; в двухсторонних — и рабочий, и холостой ходы осуществляются за счёт сжатого воздуха);
  - мембранные, представляющие собой герметичную камеру, разделённую мембраной на две полости; в данном случае цилиндр соединён с жёстким центром мембраны, на всю площадь которой и производит действие сжатый воздух (также, как и поршневые, выполняются в двух видах — одно- либо двухстороннем).
  - Сильфонные применяются реже. Практически всегда одностороннего действия: усилие возврата может создаваться как упругостью самого сильфона, так и с использованием дополнительной пружины.
- В особых случаях (когда требуется повышенное быстродействие) применяют специальный тип пневмоприводов — вибрационный пневмопривод релейного типа.

Одно из применений пневматических приводов является использование их в качестве силовых приводов на пневматических тренажерах.

### **Принцип действия пневматических машин.**

Многие пневматические машины имеют свои конструктивные аналоги среди объёмных гидравлических машин. В частности, широко применяются аксиально-поршневые пневмомоторы и компрессоры, шестерённые и пластинчатые пневмомоторы, пневмоцилиндры...

### **Достоинства пневмопривода.**

- в отличие от гидропривода — отсутствие необходимости возвращать рабочее тело (воздух) назад к компрессору;
- меньший вес рабочего тела по сравнению с гидроприводом (актуально для ракетостроения);
- меньший вес исполнительных устройств по сравнению с электрическими;
- возможность упростить систему за счёт использования в качестве источника энергии баллона со сжатым газом, такие системы иногда используют вместо пиропатронов, есть системы, где давление в баллоне достигает 500 МПа;
- простота и экономичность, обусловленные дешевизной рабочего газа;
- быстрота срабатывания и большие частоты вращения пневмомоторов (до нескольких десятков тысяч оборотов в минуту);
- пожаробезопасность и нейтральность рабочей среды, обеспечивающая возможность применения пневмопривода в шахтах и на химических производствах;
- в сравнении с гидроприводом — способность передавать пневматическую энергию на большие расстояния (до нескольких километров), что позволяет использовать пневмопривод в качестве магистрального в шахтах и на рудниках;
- в отличие от гидропривода, пневмопривод менее чувствителен к изменению температуры окружающей среды вследствие меньшей зависимости КПД от

утечек рабочей среды (рабочего газа), поэтому изменение зазоров между деталями пневмооборудования и вязкости рабочей среды не оказывают серьёзного влияния на рабочие параметры пневмопривода; это делает пневмопривод удобным для использования в горячих цехах металлургических предприятий.

### **Недостатки пневмопривода.**

- нагревание и охлаждение рабочего газа в процессе сжатия в компрессорах и расширения в пневмомоторах; этот недостаток обусловлен законами термодинамики, и приводит к следующим проблемам:
  - возможность обмерзания пневмосистем;
  - конденсация водяных паров из рабочего газа, и в связи с этим необходимость его осушения;
- высокая стоимость пневматической энергии по сравнению с электрической (примерно в 3-4 раза), что важно, например, при использовании пневмопривода в шахтах;
- ещё более низкий КПД, чем у гидропривода;
- низкие точность срабатывания и плавность хода;
- возможность взрывного разрыва трубопроводов или производственного травматизма, из-за чего в промышленном пневмоприводе применяются небольшие давления рабочего газа (обычно давление в пневмосистемах не превышает 1 МПа, хотя известны пневмосистемы с рабочим давлением до 7 МПа – например, на атомных электростанциях), и, как следствие, усилия на рабочих органах значительно меньшие в сравнении с гидроприводом). Там, где такой проблемы нет (на ракетах и самолетах) или размеры систем небольшие, давления могут достигать 20 МПа и даже выше.
- для регулирования величины поворота штока привода необходимо использование дорогостоящих устройств - позиционеров.

## 6. Простые виды деформаций

### Основные понятия.

Сопротивление материалов – наука, в которой изложены принципы и методы расчета частей сооружений и машин на прочность, жесткость и устойчивость.

*Прочность* – способность конструкции выдерживать заданные нагрузки без разрушения.

*Жесткость* – способность детали воспринимать заданные внешние нагрузки, не изменяя свои первоначальные формы и размеры выше норм установленных на основе условий её нормальной работы.

*Устойчивость* – способность конструкции сохранять первоначальную форму равновесия.

В отличие от теоретической механики, в сопротивлении материалов рассматриваются задачи, в которых все тела принимаются деформируемыми, то есть способными изменять первоначальную форму и размеры при действии на них внешних сил. Деформации, полностью исчезающие после нагрузок, называют *упругими*, а остающиеся – пластическими или остаточными. Материал называется абсолютно упругим, если после прекращения действия на него внешних сил полностью исчезают вызванные силами деформации. В целях создания простых и удобных для инженерной практики расчетов используются различные приближенные методы, которые заставляют прибегать к допущениям и гипотезам о свойствах материалов и характере деформации.

Основные допущения о свойствах материалов:

- 1) Гипотеза сплошности и однородности материала. По этой гипотезе предполагается, что материал полностью заполняет весь объем без каких-либо пустот и свойства материала не зависят от величины выделенного из тела объема.
- 2) Гипотеза изотропности. Сплошная среда является изотропной, то есть физико-механические свойства материалов во всех направлениях одинаковы. Материалы, не обладающие указанным свойством, называются анизотропными. Анизотропно дерево, бумага, фанера.
- 3) Гипотеза идеальной упругости. До определенных пределов нагружения материал является идеально упругим. При больших нагрузках все материалы перестают обладать этим свойством, а поэтому данная гипотеза становится неприменимой.

Допущения связанные с характером деформаций.

- 1) Гипотеза малости деформаций. Перемещения возникающие в упругих телах под воздействием внешних сил, малы по сравнению с размером тела. Эта гипотеза позволяет при составлении уравнений равновесия не учитывать изменения в расположении сил. Указанное допущение носит название принципа начальных размеров. Проиллюстрируем данное положение простым примером. Момент силы  $F$  относительно точки  $A$  заделки считают равным  $Fl$ , а не  $Fl_1$ , так как разница между  $l$  и  $l_1$  незначительна.
- 2) Гипотеза линейности деформаций. Перемещения точек упругого тела прямо

пропорциональны действующим нагрузкам. Суть допущения покажем на примере. Если балка при действии силы  $F$  прогнется на величину  $f$ , то вдвое большая сила вызовет прогиб балки в два раза больший –  $2f$ . Тела, для которых справедлива указанная гипотеза называются линейно деформируемыми.

3) Принцип независимости действия сил. Результат действия на тело системы сил не зависит от порядка приложения внешних сил и равен сумме результатов действия каждой силы в отдельности. Пусть на тело действует две силы  $F_1$  и  $F_2$  при этом точка  $A$  балки получит перемещение  $f$ . Если к балке приложить силу  $F_1$  точка  $A$  получит перемещение  $f_1$ , при действии силы  $F_2$  – перемещение  $f_2$ . При одновременном действии обеих сил перемещение точки  $A$  равно алгебраической сумме перемещений  $f_1$  и  $f_2$ :

$$f=f_1+f_2$$

Указанный принцип носит название суперпозиции, и он справедлив лишь для линейно деформируемых тел.

В сопротивлении материалов исследование вопроса о прочности реального объекта начинается с выбора расчетной схемы. Приступая к расчету, необходимо выделить самое существенное для рассматриваемого элемента, отбросив частности, несущественные для решения, но значительно его усложняющие, то есть создать расчетную схему элементов.

Расчетная схема – это реальный объект, освобожденный от несущественных особенностей.

Пример. Требуется произвести расчет на прочность канат подъемника. В первую очередь надо учесть вес поднимаемого груза, ускорение с которым он движется, а при большой высоте подъема, возможно также и вес самого каната. В тоже время надо отбросить влияние таких несущественных факторов, как аэродинамическое сопротивление, возникающее при подъеме клетки, силы барометрического давления на разных высотах и т.д. Для одного и того же объекта может быть предложено несколько расчетных схем, в первую очередь в зависимости от требуемой точности и от того, какая сторона явления интересует исследователя в конкретном случае. Так, если в данном примере нужно оценить только прочность каната, то клетку и груз допустимо рассматривать как жесткое целое и свести их действие на канат к силе, приложенной на конце каната. Если необходимо решить вопрос о прочности самой клетки, то последнюю уже нельзя считать абсолютно твердым телом. Ее конструктивные особенности надо рассматривать отдельно и в соответствии с этим выбирать для нее иную расчетную схему.

По геометрическим признакам все реальные тела могут быть отнесены к таким расчетным схемам: брус, оболочка, пластина и массивное тело. Для того, чтобы рассчитываемый элемент отнести к одной из указанных схем, необходимо знать геометрические признаки каждого из них.

*Брус* – тело, один размер которого – длина – значительно двух других – ширины и толщины. По виду оси бруса могут быть прямыми и кривыми (рис.4). Если сечение изменяется по длине бруса, то он называется бруском переменного сечения.

*Оболочка* – тело, один размер которого – толщина – значительно меньше двух других – радиуса кривизны и длины.

*Пластина* можно рассматривать как частный случай оболочки бесконечно большого радиуса кривизны (рис.5).

*Массив* – тело, все размеры которого соизмеримы.

### Центральное растяжение-сжатие.

Под *растяжением (сжатием)* понимают такой вид деформации стержня, при котором в его поперечном сечении возникает лишь один внутренний силовой фактор - продольная сила  $N_z$ . Поскольку продольная сила численно равна сумме проекций, приложенных к одной из отсеченных частей внешних сил на ось стержня (для прямолинейного стержня она совпадает в каждом сечении с осью  $O_z$ ), то растяжение (сжатие) имеет место, если все внешние силы, действующие по одну сторону от данного поперечного сечения, сводятся к равнодействующей, направленной вдоль оси стержня. Одна и та же продольная сила  $N_z$  при действии на различные части стержня (левую или правую) имеет противоположные направления. Знак  $N_z$  зависит от характера вызываемой ею деформации. Продольная сила считается положительной, если вызывает растяжение элемента, и она отрицательна, если вызывает сжатие.

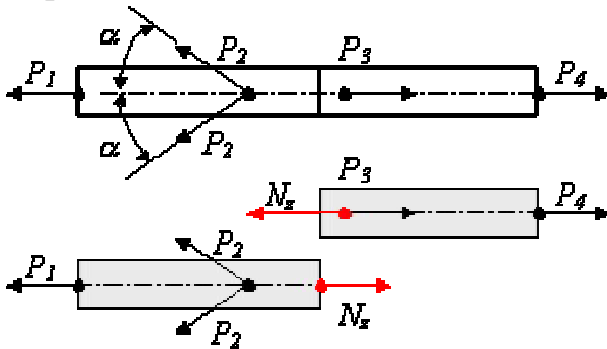


Рис. 6.1

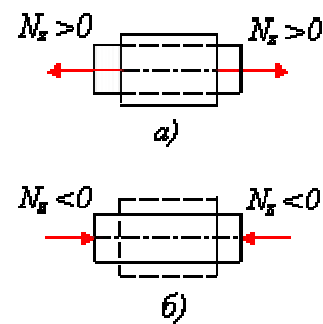


Рис. 6.2

Для того, чтобы сформулировать предпосылки теории растяжения (сжатия) призматического стержня, обратимся к эксперименту. Представим себе стержень, изготовленный из какого-либо податливого материала (например, резины), на боковую поверхность которого нанесена система продольных и поперечных рисок. Эта ортогональная система рисок остается таковой и после приложения растягивающей нагрузки. Поскольку поперечные риски являются следами поперечных сечений на поверхности стержня и остаются прямыми и перпендикулярными к оси стержня то это свидетельствует о выполнении *гипотезы плоских сечений (Бернулли)*. С учетом *гипотезы об отсутствии поперечного взаимодействия продольных волокон* приходим к выводу, что деформация растяжения стержня сводится к одноосному растяжению его продольных волокон, и в поперечном сечении стержня возникают лишь нормальные напряжения  $\sigma$ , индекс  $z$  у которых опускаем. Ортогональность продольных и поперечных рисок свидетельствует также об отсутствии сдвигов, а,



следовательно, и связанных с ними касательных напряжений  $\tau$  в поперечных и продольных сечениях стержня.

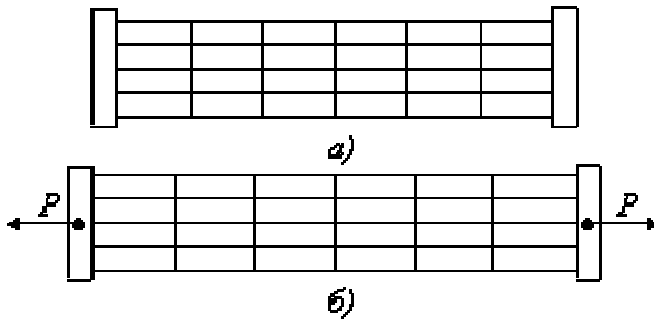


Рис. 6.3

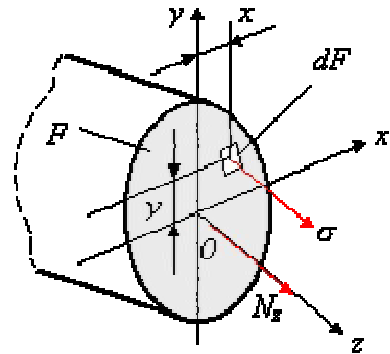


Рис. 6.4

Тогда продольная сила  $N''$  равная сумме проекции внутренних сил, действующих в данном поперечном сечении площадью  $F$  (рис. 6.4) очевидно будет равна

$$N_z = \int_F \sigma dF \quad (6.1)$$

Это соотношение является уравнением равновесия статики, связывающим продольную силу  $N_z$ , и нормальное напряжение  $\sigma$ , которое в общем случае является функцией координат  $x$  и  $y$  и поэтому не может быть найдено из одного лишь 1 уравнения статики. Таким образом, задача определения напряжений даже в самом простом случае деформирования стержня (растяжении или сжатии) оказывается статически неопределимой.

Необходимое для решения этой задачи дополнительное уравнение вытекает из гипотезы плоских сечений. Поскольку поперечные сечения стержня, оставаясь плоскими и перпендикулярными к оси стержня, в процессе деформирования лишь поступательно перемещаются вдоль оси стержня (что приводит к одинаковому удлинению всех продольных волокон), то приходим к уравнению  $\epsilon = \text{const}$ , из которого ввиду однозначности связи  $\sigma$  и  $\epsilon$  (для линейно-упругого материала это - закон Гука:  $\sigma = E\epsilon$ .) вытекает, что

$$\sigma = \text{const.}$$

Решая совместно уравнения получим, что  $N_z = \sigma F$  или

$$\sigma = N_z / F.$$

Таким образом, при растяжении (сжатии) призматического стержня нормальные напряжения равномерно распределены по поперечному сечению, а касательные напряжения в сечениях отсутствуют, что является следствием гипотезы плоских сечений. Указанное, несмотря на, казалось бы, очевидность и простоту, является фундаментальным результатом, справедливым, строго говоря, лишь для призматического стержня. Однако в инженерной практике его используют и для приближенной оценки нормальных напряжений в стержнях переменного сечения. При этом, чтобы погрешность формулы была невелика, необходимо, чтобы площадь поперечного сечения стержня изменялась достаточно плавно вдоль его оси.

Условие прочности при растяжении (сжатии) призматического стержня для стержня из пластического материала (т. е. материала, одинаково работающего на растяжение и сжатие) будет иметь вид:

$$\sigma = N_z / F \leq [\sigma], \quad (6.2)$$

где  $[\sigma]$  - допускаемое напряжение. Напряжение  $\sigma$  в условии подставляется по модулю, так как знак  $\sigma$  в этом случае роли не играет. Для стержней из хрупких материалов, неодинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию, знак напряжения имеет принципиальное значение, и условие прочности приходится формулировать отдельно для растяжения и сжатия:

$$\sigma_p = N_z / F \leq [\sigma_p],$$

$$|\sigma_c| = |N_z| / F \leq [\sigma_c],$$

где  $\sigma_p$  и  $\sigma_c$  - напряжения растяжения и сжатия, а  $[\sigma_p]$  и  $[\sigma_c]$  - соответствующие им допускаемые напряжения.

В практике инженерных расчетов, исходя из условия прочности, решаются три основные задачи механики материалов конструкций. В применении к случаю растяжения (сжатия) призматического стержня эти задачи формулируются следующим образом.

Проверка прочности (поверочный расчет). Этот расчет проводится, если нагрузка (в нашем случае ее представляет  $N_z$ ), сечение стержня  $F$  и его материал  $[\sigma]$  заданы.

Необходимо убедиться, что выполняется условие прочности:

$$\sigma = N_z / F \leq [\sigma],$$

Проверочный расчет заключается в том, что определяется фактический коэффициент запаса прочности  $n$  и сравнивается с нормативным коэффициентом запаса  $[n]$ :

$$n = \frac{\sigma^*}{\sigma} = \frac{\sigma^* F}{N_z} \geq [n],$$

где  $\sigma^*$  - предельное (или опасное) напряжение, т. е. напряжение, вызывающее отказ элемента конструкции (напомним, что, например, для стержня из пластичного материала это-предел текучести  $\sigma_t$  или условный предел текучести  $\sigma_{0.2}$ ).

Подбор сечения (проектный расчет). В этом расчете по Заданной нагрузке ( $N_z$ ) определяются размеры поперечного сечения стержня ( $F$ ) из заданного материала ( $[\sigma]$  дано). Минимальное значение  $F$  получим, если в условии прочности (1) принять знак равенства:

$$[F] = N_z / [\sigma] \quad (6.3)$$

Определение *допускаемой нагрузки*, то есть максимального значения нагрузки, которое допускает данный элемент конструкции ( $F$  и  $[\sigma]$  даны) при выполнении условия прочности:

$$[N] = [\sigma] F.$$

## Закон Гука.

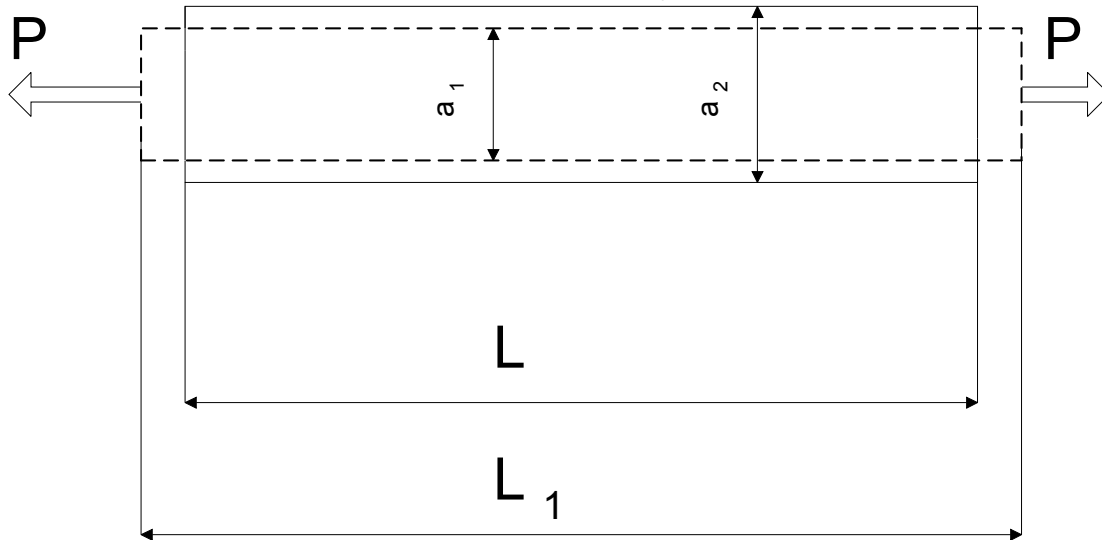


Рис. 6.5

Пусть первоначальная длина растянутого стержня равна  $L$ , а длина после деформации  $L_1$ . Приращение длины  $\Delta L = L_1 - L$  называется абсолютным удлинением стержня, а отношение  $\Delta L / L = \varepsilon$  называется относительным удлинением. Из множества опытов установлена следующая зависимость, которая получила название Закон Гука:

$$\varepsilon = \sigma / E,$$

где  $\sigma$  – нормальное напряжение,

$E$  – модуль упругости первого рода или модуль Юнга.

В пределах малых удлинений для большинства материалов справедлив закон Гука - нормальные напряжения в поперечном сечении прямо пропорциональны относительной линейной деформации  $\varepsilon$   $\sigma = E\varepsilon$ .

Коэффициент пропорциональности  $E$  - модуль продольной упругости, его величина постоянна для каждого материала. Он характеризует жесткость материала, т.е. способность сопротивляться деформированию под действием внешней нагрузки.

Средние значения  $E$  и  $\mu$  для некоторых материалов даны в таблице 6.1.

Таблица 6.1

Значения модуля упругости  $E$  и коэффициента Пуассона  $\nu$

Материал	$E$ , МПа	$\nu$
Сталь	$(2-2.2) \cdot 10^5$	0.24-0.3
Титан	$1.1 \cdot 10^5$	0.25
Алюминий	$0.7 \cdot 10^5$	0.32-0.36
Медь	$1.0 \cdot 10^5$	0.31-0.34
Чугун	$(1.1-1.6) \cdot 10^5$	0.23-0.27
Резина	1.0-0.8	0.5
Пробка	-	0
Стекловолокно	$(0.18-0.4) \cdot 10^5$	0.25
Дерево	$1 \cdot 10^4$	-

$$\Delta L = NL / ES,$$

(6.4)

где  $N$  – продольная сила,  
 $S$  – площадь сечения,  
 $L$  – длина стержня,  
 $E$  – модуль Юнга.

### Сдвиг.

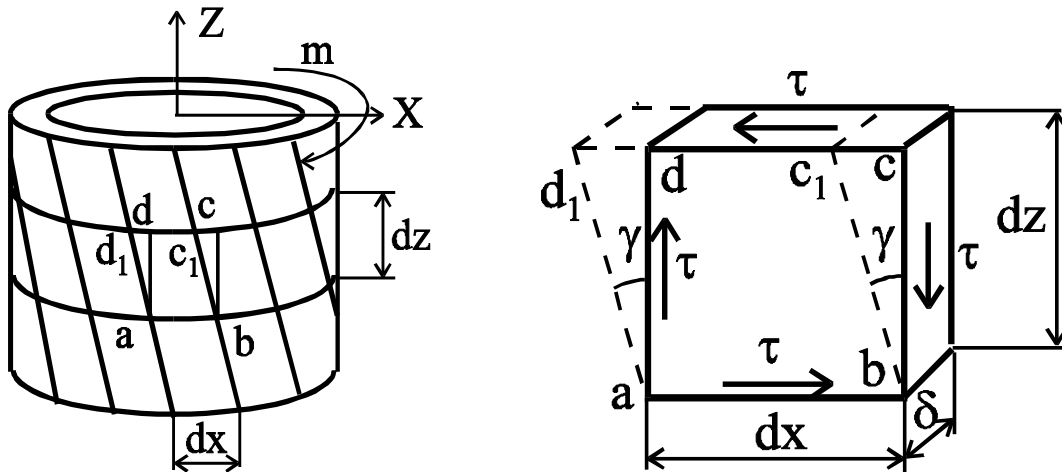


Рис. 6.6

Напряженное состояние, при котором на гранях прямоугольного элемента возникают только касательные напряжения  $\tau$ , называется **чистым сдвигом**. Экспериментально чистый сдвиг может быть осуществлен при кручении тонкостенной трубы (рис. 6.6).

Рассмотрим элемент  $abcd$ , вырезанный из тонкостенной трубы. При возникновении касательных напряжений элемент перекашивается. Если считать грань  $ab$  закрепленной, то грань  $cd$  сдвинется в положение  $c_1d_1$ . Все прямые углы между гранями изменятся на величину  $\gamma$ , который называется **углом сдвига**. Касательные напряжения и угол сдвига связаны прямой пропорциональностью, т.е. законом Гука при сдвиге:

$$\tau = G \cdot \gamma \quad (6.5)$$

где  $G$  – модуль сдвига (модуль упругости второго рода); для стали  $G = 8 \cdot 10^4$  МПа.

Между модулем упругости  $E$  и  $G$  существует связь:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}, \text{ которая подтверждается экспериментально.}$$

Здесь  $\mu$  – коэффициент Пуассона.

### Кручение.

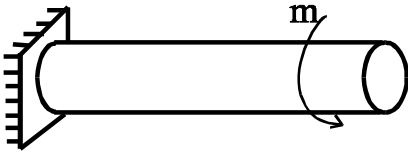
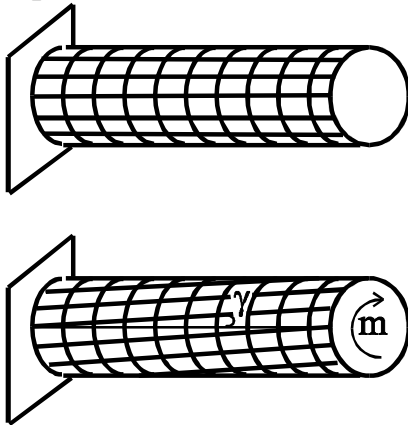


Рис. 6.7.

Деформация кручения вызывается скручивающими моментами, плоскости действия которых перпендикулярны продольной оси (рис. 6.7).

При кручении возникает один внутренний силовой фактор - крутящий момент  $M_k$ .

Характер распределения напряжений по сечению выясним, рассмотрев геометрическую картину деформации вала. Для этого на поверхности нанесем сетку, состоящую из линий, параллельных оси, и линий, представляющих собой параллельные круги.



После приложения скручивающего момента наблюдаем следующее: образующие цилиндра превращаются в линии одинакового наклона к оси стержня; параллельные круги не искривляются и расстояние между ними остается неизменным, радиусы, проведенные в торцевых сечениях, остаются прямыми (рис. 6.8). Таким образом, при построении теории напряженно-деформированного состояния вала при кручении пользуются следующими гипотезами:

Рис. 6.8

1. Поперечные сечения вала остаются при деформации плоскими и перпендикулярными к оси вала. Они лишь поворачиваются одно относительно другого на некоторый угол закручивания, обозначаемый  $\varphi$ . (гипотеза плоских сечений).

2. Расстояния между поперечными сечениями остаются неизменными.

3. Радиусы, проведенные в поперечных сечениях, при деформации не искривляются.

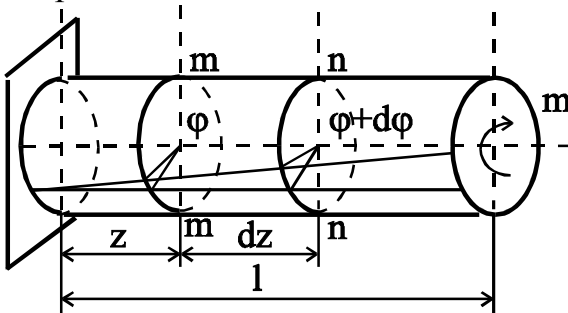


Рис. 6.9

Рассмотрим некоторый участок вала длиной  $dz$ , выделенный из вала. Пусть угол поворота сечения  $m - m$  относительно неподвижного будет  $\varphi$ , тогда угол поворота сечения  $n - n$ , расположенного на расстоянии  $dz$ , будет  $\varphi + d\varphi$ . Следовательно, угол закручивания участка вала длиной  $dz$  равен  $d\varphi$ .

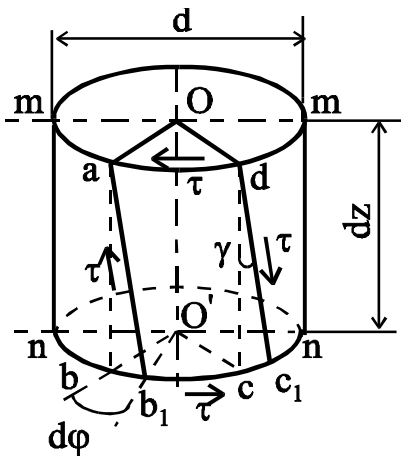


Рис. 6.10

Рассмотрим деформацию прямоугольного элемента  $abcd$  бесконечно малой толщины, выделенного у поверхности вала. Так как радиусы остаются прямыми, то отрезок  $O'b$  поворачиваясь в плоскости поперечного сечения на угол закручивания  $d\varphi$ , займет положение  $O'b_1$ . При этом образующая  $ab$  переместится в новое положение  $ab_1$ , составив с первоначальной угол  $\gamma$ . Аналогично образующая  $dc$  переместится в положение  $dc_1$ . Так как длины этих отрезков практически неизменны, то деформация прямоугольного элемента  $abcd$  состоит в изменении первоначально прямых углов на величину угла  $\gamma$ .

Таким образом, рассмотренный элемент находится в условиях чистого сдвига и, следовательно, на его гранях действуют касательные напряжения  $\tau$ .

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{bb_1}{ab} \approx \gamma.$$

Учитывая, что  $ab = dz$ , а  $bb_1 = r \cdot d\varphi$ , угол сдвига:  $\gamma = r \frac{d\varphi}{dz}$ .

Отношение  $\frac{d\varphi}{dz} = \theta$  называется относительным погонным углом закручивания  $\left[ \frac{1}{\text{м}} \right]$  или  $\left[ \frac{\text{рад}}{\text{м}} \right]$ .

$$\gamma = \theta \cdot r$$

Если рассмотреть деформацию прямоугольного элемента, расположенного внутри вала на произвольной цилиндрической поверхности радиуса  $\rho$ , то угол сдвига  $\gamma_\rho = \theta \rho$ .

Найдем зависимость между напряжениями и деформациями при кручении. С учетом закона Гука при чистом сдвиге

$$\tau_\rho = G \cdot \gamma_\rho = G \cdot \theta \cdot \rho$$

Из двух последних формул следует, что углы сдвига и касательные напряжения в поперечном сечении изменяются по линейному закону прямо пропорционально расстоянию  $\rho$  точек от центра сечения.

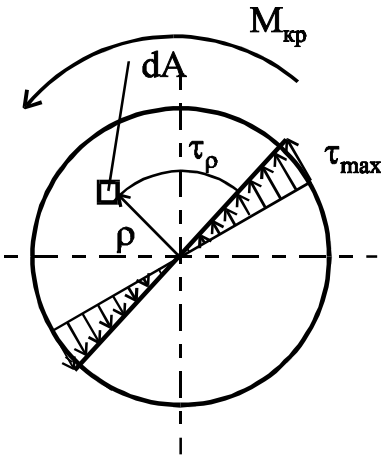


Рис. 6.11

Очевидно, что максимальные касательные напряжения  $\tau_{\max}$  будут возникать у поверхности вала, то есть при  $\rho = r$ .

$$\tau_r = \tau_{\max} = G \cdot \theta \cdot r.$$

Выделим на расстоянии  $\rho$  от центра сечения элементарную площадку  $dA$ . Крутящий момент  $M_k$ :

$$M_k = \int_A \tau_\rho \rho dA = G \cdot \theta \int_A \rho^2 dA = G \cdot \theta \cdot I_p.$$

Отсюда погонный угол закручивания

$$\theta = \frac{M_k}{G \cdot I_p}.$$

практически Выражение  $G \cdot I_p$  - жесткость вала при кручении.

$I_p$  - полярный момент инерции.

$I_p = \frac{\pi \cdot r^4}{2}$  - для круглого сечения;  $I_p = \frac{\pi \cdot (r_H^4 - r_B^4)}{2}$  - для трубчатого сечения.

Взаимный угол закручивания двух сечений, расположенных на расстоянии  $l$ :

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_k}{G \cdot I_p} dz.$$

Если в пределах цилиндрического участка вала длиной  $l$  крутящий момент  $M_k$  имеет постоянное значение, то

$$\varphi = \theta \cdot l = \frac{M_k l}{G \cdot I_p} \quad - \text{закон Гука при кручении.}$$

Так как  $\tau = G \cdot \theta \cdot \rho$ , то 
$$\tau = \frac{M_k}{I_p} \rho.$$

Максимальные касательные напряжения, действующие по контуру сечения:

$$\tau_{\max} = \frac{M_k r}{I_p} = \frac{M_k}{W_p}, \quad (6.6)$$

где  $W_p = \frac{I_p}{r}$  - полярный момент сопротивления  $[ед^3]$ .

$$W_p = \frac{\pi \cdot r^3}{2} \quad - \text{ для круглого сечения; } \quad W_p = \frac{\pi \cdot (r_H^4 - r_B^4)}{2 \cdot r_H} \quad - \text{ для трубчатого сечения.}$$

Из второй гипотезы следует, что нормальные напряжения  $\sigma$  при кручении равны нулю.



## 7. Изгиб балки

При прямом поперечном изгибе в сечениях стержня возникает изгибающий момент  $M_x$  и поперечная сила  $Q_y$  (рис. 7.1), которые связаны с нормальными  $\sigma$  и касательными  $\tau_{yz}$  напряжениями

$$M_x = \int_F \sigma y dF, \quad Q_y = \int_F \tau_{yz} dF.$$

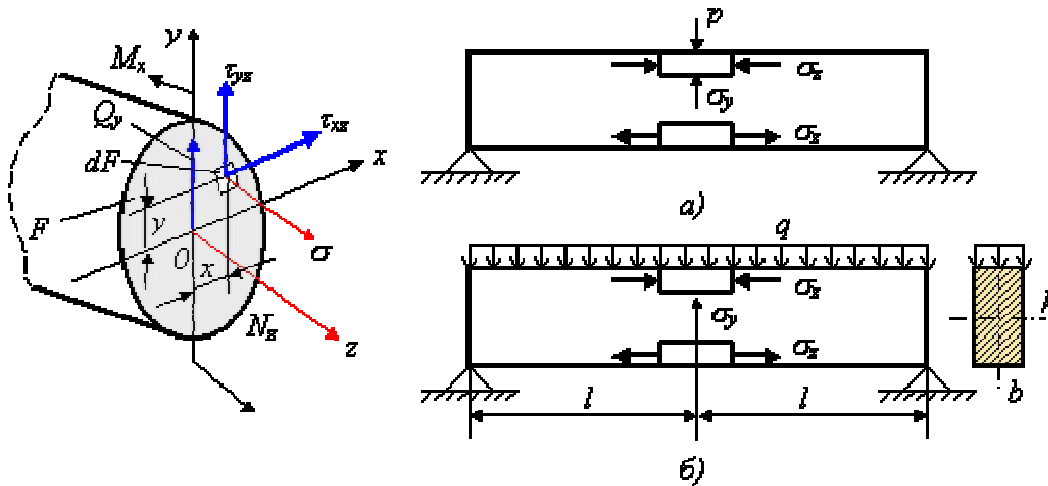


Рис. 7.1

Выведенная в случае чистого изгиба стержня формула для прямого поперечного изгиба, вообще говоря, неприменима, поскольку из-за сдвигов, вызываемых касательными напряжениями  $\tau_{yz}$ , происходит деформация поперечных сечений (отклонение от закона плоских сечений). Однако для балок с высотой сечения  $h < l/4$  (рис. 7.1) погрешность невелика и ее применяют для определения нормальных напряжений поперечного изгиба как приближенную. При выводе условия прочности при чистом изгибе использовалась гипотеза об отсутствии поперечного взаимодействия продольных волокон. При поперечном изгибе наблюдаются отклонения от этой гипотезы:

а) в местах приложения сосредоточенных сил. Под сосредоточенной силой напряжения поперечного взаимодействия могут быть достаточно велики и во много раз превышать продольные напряжения  $\sigma_z$ , убывая при этом, в соответствии с принципом Сен-Венана, по мере удаления от точки приложения силы;

б) в местах приложения распределенных нагрузок. Так, в случае, приведенном на рис. 7.1, б, напряжения от давления на верхние волокна балки  $\sigma_y = -q/b$ . Сравнивая их с продольными напряжениями  $\sigma_z$ , имеющими порядок

$$\sigma_z \approx \max \sigma_z = \frac{ql^2/8}{bh^2/6} = \frac{3q}{4l} \left( \frac{l}{h} \right)^2 \approx \frac{q}{b} \left( \frac{l}{h} \right)^2$$

приходим к выводу, что напряжения  $\sigma_y \ll \sigma_z$  при условии, что  $h^2 \ll l^2$ , так как  $\sigma_y / \sigma_z \approx (h/l)^2 \ll 1$ .

Получим формулу для касательных напряжений  $\tau_{yz}$ . Примем, методика расчета нормальных напряжений известна, что касательные напряжения равномерно распределены по ширине поперечного сечения (рис. 7.2). Эта предпосылка выполняется тем точнее, чем уже поперечное сечение стержня. Точное решение задачи для прямоугольного поперечного сечения показывает, что отклонение от равномерного распределения  $\tau_{yz}$ , зависит от отношения сторон  $b/h$ . При  $(b/h)=1,0$  оно составляет 12,6%, при  $(b/h)=0,5$  - только 3,3%.

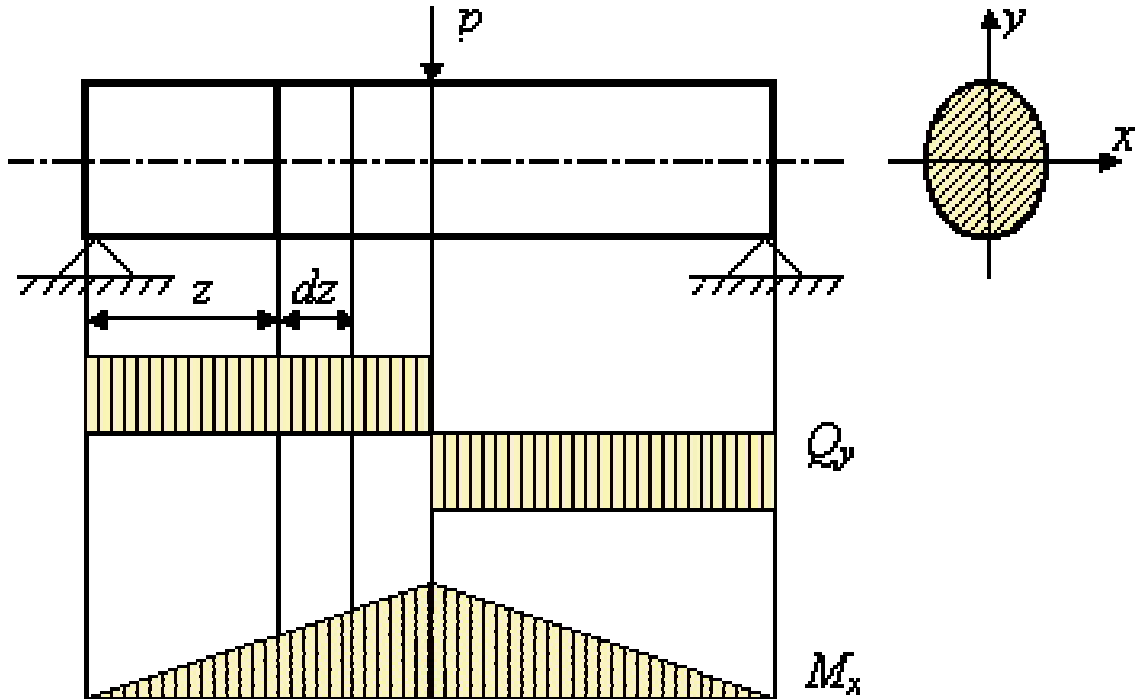


Рис. 7. 2

Непосредственное определение напряжений  $\tau_{yz}$  затруднительно, поэтому находим равные им (вследствие закона парности) касательные напряжения  $\tau_{yz}$ , возникающие на продольной площадке с координатой  $y$  элемента длиной  $dz$ , вырезанного из балки, (рис. 7.2). Сам элемент показан на рис. 7.3. От этого элемента продольным сечением, отстоящим от нейтрального слоя на  $y$ , отсекаем верхнюю часть, заменяя действие отброшенной нижней части касательными напряжениями  $\tau$  (индекс  $yz$  в дальнейшем опускаем), равнодействующая которых  $dT=\tau b dz$ . Здесь, согласно второй предпосылке

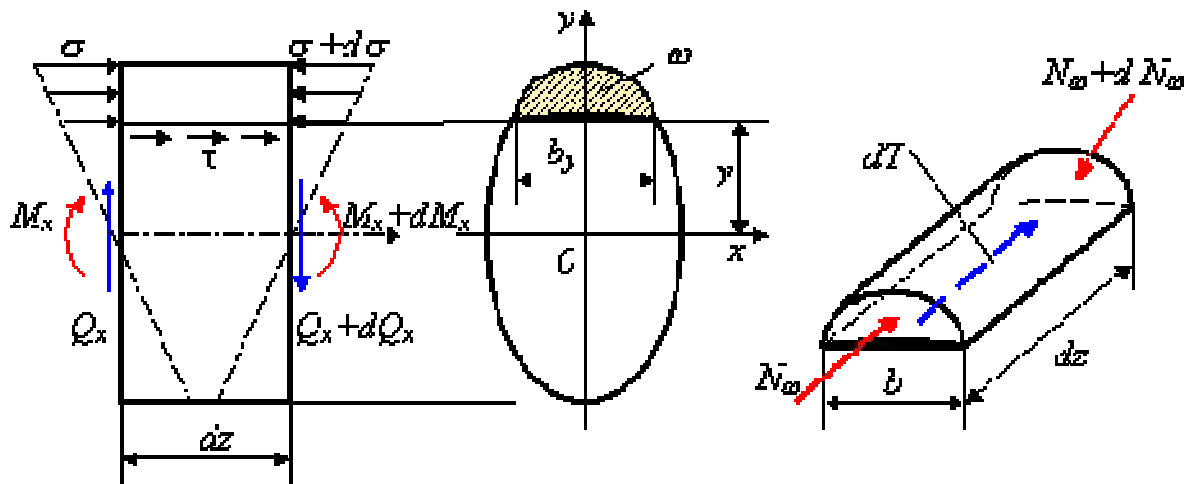


Рис. 7.3

$\tau = \text{const}$  по ширине элемента  $b$ . Нормальные напряжения  $\sigma$  и  $\sigma + d\sigma$ , действующие на торцевых площадках элемента, также заменим их равнодействующими

$$N_{\omega} = \int_{\omega} \sigma dF = \int_{\omega} \frac{M_x}{J_x} y dF = \frac{M_x}{J_x} S_x^{\omega}$$

$$N_{\omega} + dN_{\omega} = \int_{\omega} (\sigma + d\sigma) dF = \frac{M_x + dM_x}{J_x} S_x^{\omega}$$

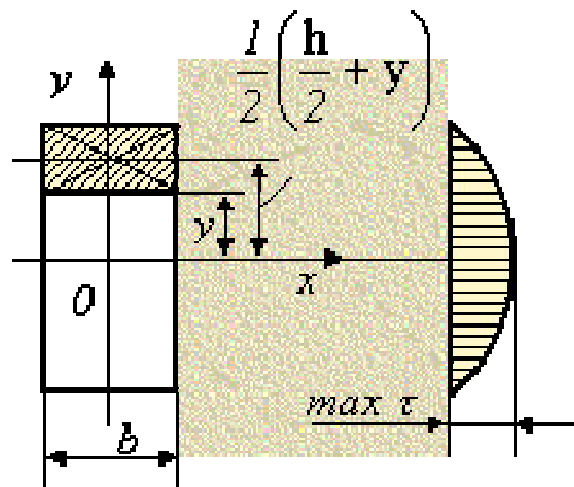


Рис. 7.4

Согласно первой предпосылке нормальные напряжения определяются уже

$$S_x^{\omega} = \int_F y dF$$

известным способом, где  $S_x^{\omega}$  - статический момент отсеченной части площади поперечного сечения  $\omega$  относительно оси  $Ox$ .

Рассмотрим условие равновесия элемента составив для него уравнение статики  $\Sigma Z = 0$ :

$$N_{\omega} + dT - (N_{\omega} + dN_{\omega}) = 0,$$

откуда после несложных преобразований, учитывая, что

$$\frac{dM_x}{dz} = Q_y .$$

получаем формулу для касательных напряжений при нормальном поперечном изгибе призматического стержня

$$\tau = \frac{Q_y S_x^{\omega}}{J_x b_y} .$$

которая называется формулой Журавского. В этой формуле  $b_y$  - ширина сечения в том месте, где определяются касательные напряжения, а статический момент, подставляемый в эту формулу, может быть вычислен как для верхней, так и для нижней части (статические моменты этих частей сечения относительно его центральной оси  $Ox$  отличаются только знаком, так как статическим момент всего сечения равен нулю).

Покажем, что доминирующая роль в расчетах на прочность балки, подвергнутой поперечному изгибу, будет принадлежать расчету по нормальным напряжениям. Для этого оценим порядок  $\max \sigma$  и  $\max \tau$  на примере консольной балки:

$$\max \sigma = \frac{\max M_x}{W_x} \approx \frac{Pl}{h^3}, \quad \max \tau \approx \frac{Q_y}{F} \approx \frac{P}{h^2},$$

так как  $M_x \approx Pl$ ,  $Q_y \approx P$ ,  $F \approx h^2$ ,  $W_x \approx h^3$ . Тогда

$$\frac{\max \tau}{\max \sigma} \approx \frac{Pl/h^2}{Pl/h^3} = hl \ll 1 ,$$

откуда  $\max \tau \ll \max \sigma$ , а поскольку  $[\tau]/[\sigma] \approx 0,5$  то доминирующим в этом случае будет расчет по нормальным напряжениям и условие прочности, например, для балки из пластичного материала, работающей на прямой изгиб, как и в случае чистого изгиба будет иметь вид

$$\max \sigma = \frac{\max M_x}{W_x} \leq [\sigma]$$

### Рациональные формы поперечных сечений при изгибе.

Наиболее рациональным следует признать сечение, обладающее минимальной площадью при заданной нагрузке (изгибающем моменте) на балку. В этом случае расход материала на изготовление балки, будет минимальным. Для получения балки минимальной материалоемкости нужно стремиться к тому, чтобы по возможности наибольший объем материала работал при напряжениях, равных допускаемым или близким к ним. Прежде всего рациональное сечение балки при изгибе должно удовлетворять условию равнопрочности растянутой и сжатой зон балки. Иными словами необходимо, чтобы наибольшие напряжения растяжения ( $\max \sigma_p$ ) и наибольшие напряжения сжатия ( $\max \sigma_c$ ) одновременно достигали допускаемых напряжений  $[\sigma_p]$  и  $[\sigma_c]$ .

Поэтому для балки из пластичного материала (одинаково работающего на растяжение и сжатие:  $[\sigma_p] = [\sigma_c] = [\sigma]$ ), условие равнопрочности выполняется для сечений, симметричных относительно нейтральной оси. К таким сечениям относится, например, прямоугольное сечение (рис. 7.5, а), при котором обеспечено условие равенства  $\max \sigma_p = \max \sigma_c$ . Однако в этом случае материал, равномерно распределенный по высоте сечения, плохо используется в зоне нейтральной оси. Чтобы получить более рациональное сечение, необходимо возможно большую часть материала переместить в зоны, максимально удаленные от нейтральной оси. Таким образом, приходим к рациональному для пластичного материала сечению в форме симметричного двутавра (рис. 7.5, б), у которого возможно большая часть материала сосредоточена на полках (горизонтальных массивных листах), соединенных стенкой (вертикальным листом), толщина которой ( $\delta$ ) назначается из условий прочности стенки по касательным напряжениям, а также из соображений ее устойчивости. К двутавровому сечению близко по критерию рациональности так называемое коробчатое сечение (рис. 7.5, в).

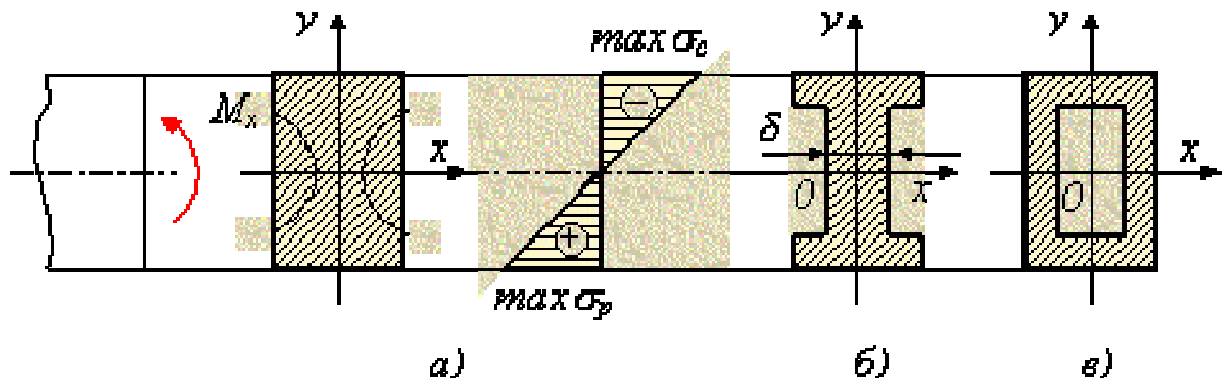


Рис. 7.5

Рассуждая аналогично, приходим к выводу, что для балок из хрупкого материала наиболее рациональным будет сечение в форме несимметричного двутавра, удовлетворяющего условию равнопрочности на растяжение и сжатие (рис. 7.6):

$$\frac{y_{\max}^{(p)}}{y_{\max}^{(c)}} = \frac{[\sigma_p]}{[\sigma_c]},$$

которое вытекает из требования

$$\frac{\max \sigma_p}{\max \sigma_c} = \frac{[\sigma_p]}{[\sigma_c]}.$$

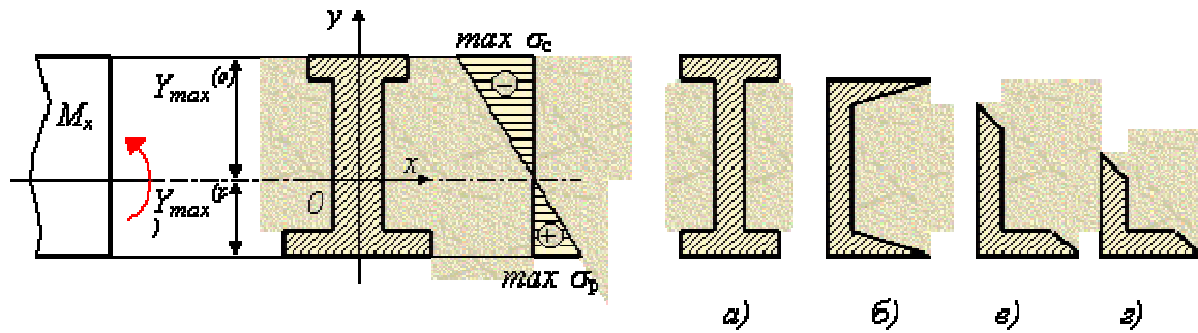


Рис. 7.6

Идея рациональности поперечного сечения стержней при изгибе реализована в стандартных тонкостенных профилях, получаемых методами горячего прессования или прокатки из рядовых и легированных конструкционных высококачественных сталей, а также алюминия и алюминиевых сплавов, получивших широкое распространение в строительстве, машиностроении, авиационном машиностроении. Широко распространены показанные на рис. 7.6: *а* - двутавр, *б* - швеллер, *в* - неравнобокий уголок, *г* - равнобокий уголок. Реже встречаются тавр, таврошвеллер, зетовый профиль и др. Употребляются также холодногнутые замкнутые сварные профили.

Поскольку по соображениям технологии сортамент стандартных профилей по размерам ограничен (например, наибольший прокатный двутавр согласно ГОСТ 8239-72 имеет высоту 550 мм), то для больших пролетов приходится применять составные (сварные или клепаные) балки.

### Список литературы

1. Ахметзянов, М.Х. Сопротивление материалов: учебник/М.Х.Ахметзянов, И.Б.Лазарев.-2-е изд., перераб. и доп.- М.: Юрайт, 2011. – 300с.
2. Киселев, В.В. Механика (лабораторный практикум): учебное пособие / В.В. Киселев, Д.А. Ульев. – Иваново: ООНИ ИВИ ГПС МЧС России, 2008. – 121 с.
3. Покровский, А.А. Механика. Примеры и задачи: учебное пособие / А.А. Покровский, В.В. Киселев. – Иваново: ООНИ ЭКО ФГБОУ ВПО Ивановского института ГПС МЧС России, 2013. – 133с.
4. Тимофеев, Г.А. Теория механизмов и машин: учебное пособие/ Г.А. Тимофеев. – 2-е изд. перераб. и доп.- М.: Юрайт, 2011. – 351с.
5. Киселев, В.В. Механика. Контрольные задания (Часть 2): учебно-методическое пособие / А.А. Покровский, В.В. Киселев. – Иваново: ООНИ ИВИ ГПС МЧС России, 2012. – 88 с.
6. Покровский, А.А. Прикладная механика: учебное пособие для самостоятельной подготовки / А.А. Покровский, В.В. Киселев, Д.А.Ульев. – Иваново: ООНИ ИВИ ГПС МЧС России, 2012. – 91 с.
7. Покровский, А.А. Механика. Контрольные задания (Часть 1): учебно-методическое пособие / А.А. Покровский, В.В. Киселев. – Иваново: ООНИ ИВИ ГПС МЧС России, 2011. – 137 с.
8. Покровский, А.А. Прикладная механика. Кинематика: учебное пособие / А.А. Покровский, В.В. Киселев, В.Е. Иванов, М.А. Ноздрин. – Иваново: ООНИ ЭКО ФГБОУ ВПО Ивановского института ГПС МЧС России, 2014. – 114 с.
9. Покровский, А.А. Сложное движение точки: методические указания и контрольные задания / А.А. Покровский, Д.А. Ульев. – Иваново: ООНИ ИВИ ГПС МЧС России, 2010. – 26 с.
10. Топоров, А.В. Кинематический анализ рычажного механизма: учебно-методическое пособие / А.В. Топоров, Е.А. Топорова, Д.А. Ульев. – Иваново: ООНИ ИВИ ГПС МЧС России, 2011. – 80 с.
11. Топоров, А.В. Кинематика точки: учебно-методическое пособие /А.В.Топоров, В.В.Киселев. – Иваново: ООНИ ИВИ ГПС МЧС России, 2012. – 86 с.
12. Топоров, А.В. Динамика точки: учебно-методическое пособие / А.В. Топоров, В.В. Киселев. – Иваново: ООНИ ИВИ ГПС МЧС России, 2011. – 94 с.
13. Топоров, А.В. Произвольная плоская система сил: учебное пособие / А.В.Топоров, В.В.Киселев. – Иваново: ООНИ ИВИ ГПС МЧС России, 2013. – 82 с.